

Bornes sur l'énergie de la diffusion/couverture dans les réseaux de senseurs

G. Chelius[†] and E. Fleury[‡] and T. Mignon[§]

Nous étudions le problème de l'affectation des puissances au sein d'un réseau de senseurs afin de minimiser l'énergie consommée par une opération de diffusion ou par les opérations de mesures. Un des apports majeurs de notre approche est qu'elle prend en compte à la fois le coût en émission et en réception. Nous établissons un modèle analytique et présentons des bornes inférieures et supérieures. De plus, nous montrons que ces bornes peuvent être approchées à (1ϵ) près.

Keywords: ad hoc, diffusion, couverture, senseurs, énergie

1 Introduction

Le développement des réseaux de senseurs a été rendu possible grâce aux avancées importantes et à la convergence des systèmes micro-électroniques, des technologies de réseau sans-fils et de l'électronique digitale. Les réseaux de senseurs sont composés d'un nombre important de petits appareils ou senseurs, chaque senseur contenant un capteur, un processeur, une interface radio et une batterie. La recherche de protocoles efficaces en terme de consommation d'énergie s'est notablement développée durant les dernières années [uHE03, WNE02]. Nous nous intéressons particulièrement aux opérations de communication et de mesure. En effet, l'émission et la réception d'un paquet par une interface radio est un processus très coûteux et il est nécessaire de prendre la contrainte énergétique en compte dans la conception des schémas de communication aussi simples que le *broadcast* ou que le maintien d'une couverture de mesures.

Plusieurs protocoles ont été développés ou adaptés afin d'optimiser les puissances d'émissions dans un réseau de senseurs. Tous ces travaux utilisent et réfèrent un modèle de consommation simple [SCI⁺01, Rap96] où l'énergie dépensée est proportionnelle au nombre de bits émis et dépend à la fois de la distance de communication et d'une constante, le gradient distance/puissance. Le volume d'énergie nécessaire à la réception est du même ordre que celui nécessaire à l'émission. En conséquence, il ne suffit pas de diminuer les puissances de transmission [BZ02, BM03, BSM03, CPS99, uHE03, WCLF02, WNE02] mais il est également nécessaire de réduire le nombre de réceptions. Nous partons de ce modèle simple et communément admis pour développer un nouveau modèle analytique qui nous permet de calculer des bornes inférieures et supérieures sur l'énergie nécessaire pour effectuer des opérations de *broadcast* et de mesure dans un réseau de senseurs. Durant cette étude analytique, il nous a semblé primordial de considérer à la fois l'énergie consommée en émission et en réception.

2 Modélisation de la consommation d'énergie et définitions

La connectivité d'un réseau sans-fil dépend clairement de la puissance de transmission de chacun des hôtes. Nous supposons que chaque nœud est capable de choisir et modifier son propre niveau de puissance tout en n'excédant pas une valeur maximum Φ_{\max} . La puissance $e(u, v)$ nécessaire à un nœud u pour envoyer des données à un nœud v satisfait la relation suivante [Rap96] : $\frac{e(u, v)}{d(u, v)^\alpha} > \gamma$ où $d(u, v)$ est la distance séparant

[†]ARES INRIA / CITI INSA de Lyon

[‡]ARES INRIA / CITI INSA de Lyon

[§]UMR CNRS 5030, Montpellier

u et v , $\alpha \geq 1$ est le gradient distance/puissance (*distance-power gradient*) et $\gamma \geq 1$ est le paramètre de qualité de transmission (*transmission-quality*).

Nous supposons que les antennes sont omnidirectionnelles. Les contraintes du médium radio donne un modèle de communication *half duplex* 1-port réception Δ -port émission [FL94]. Nous modélisons un réseau de senseur par un graphe dirigé $G = (V, E)$. Chaque nœud $u \in V$ se voit attribuer une puissance d'émission $\Phi_u \leq \Phi_{\max}$. Chaque arc potentiel $e = (u, v) \in E$ se voit attribuer un coût de transmission $w_{u,v} \in \mathbb{R}^+$ égal à la puissance nécessaire à la réalisation d'une communication depuis u vers v . Nous notons $C(u, \Phi) = \{v \in V \mid w_{u,v} \leq \Phi_u\}$ la *couverture* de u , c'est à dire l'ensemble des nœuds pouvant comprendre une transmission initiée par u avec la puissance Φ_u . On dit des nœuds de $C(u, \Phi)$ qu'ils sont couverts par u .

Plusieurs travaux [SCI⁺01, Rap96] soulignent le fait que la réception d'informations à l'aide d'une interface radio consomme une quantité non négligeable d'énergie et que cette quantité d'énergie est du même ordre de grandeur que celle consommée lors de l'émission. Ainsi, il semble réellement important de considérer aussi bien le coût en émission qu'en réception lors d'une communication. Le but est d'étudier des schémas de *broadcast* et de couverture minimisant la consommation globale d'énergie. Étant donné un nœud racine r , la problême est de trouver un ensemble de nœuds relais et une affectation de puissance tels que tous les nœuds $v \in V$ sont couverts et tels que le volume d'énergie consommée est minimum. Si nous notons λ le coût en réception, le volume total d'énergie consommée par l'affectation de puissance est : $\sum_{u \in V} \Phi_u + \sum_{u \in V} \lambda |C(u, \Phi)|$

Afin d'identifier des bornes supérieures et inférieures pour l'énergie nécessaire pour couvrir ou pour réaliser un broadcast dans une région donnée du plan, nous considérons une densité continue de nœuds comme il est réalisé dans [DBT03]. Nous supposons également que chaque senseur est capable de choisir sa puissance d'émission dans l'intervalle $[0, \Phi_{\max}]$. Si cette approche n'est pas réaliste en terme d'implantation, nous nous en servons comme un outil analytique pour l'étude des bornes. Si P est un point de \mathbb{R}^2 et $r \in \mathbb{R}^+$, nous noterons $D(P, r)$ le disque fermé de centre P et de rayon r . A est un sous-ensemble du plan réel \mathbb{R}^2 . Cette étude est inspirée du travail réalisé dans [T64].

Definition 1. Un recouvrement de A est un ensemble dénombrable de disques $\mathcal{R} = \{D(P_i, r_i), P_i \in A, r_i \in \mathbb{R}^+, i \in I\}$ tel que : (i) L'union des disques de \mathcal{R} contient A ; (ii) Tout compact du plan ne rencontre qu'un nombre fini de disques de \mathcal{R} . Les points P_i sont appelés les émetteurs de \mathcal{R} .

Pour la suite, nous fixons un recouvrement de A : $\mathcal{R} = \{D(P_i, r_i), i \in I\}$. Si P_i, P_j sont deux émetteurs de \mathcal{R} , nous dirons que P_i peut transmettre à P_j s'il existe une suite $i = i_0, i_1, \dots, i_r = j$ d'éléments de I vérifiant, pour tout $k = 0, \dots, r-1$: $P_{i_{k+1}} \in D(P_{i_k}, r_{i_k})$.

Definition 2. Nous dirons que le recouvrement \mathcal{R} est centralisé s'il existe au moins un émetteur pouvant transmettre à tous les autres et connexe si tous les émetteurs peuvent transmettre à tous les autres.

Dans ce modèle et avec ces définitions, la recherche d'un schéma de broadcast dans A est équivalente à la recherche d'un recouvrement centralisé de A .

Constantes et calculs de coût. Nous fixons trois constantes positives non nulles, τ_e, λ et ρ , qui sont des données du modèle : τ_e est le *coût en émission relatif*, en Watts/m²; λ est le coût de réception par individu (en Watts/individu); ρ est le nombre d'individus par mètre carré dans la région A . Nous en déduisons les deux constantes suivantes : $\tau_r = \lambda \cdot \rho$ est le *coût de réception relatif*, en Watts/m² et $\tau = \tau_e + \tau_r$ est le *coût complet relatif* du modèle, en Watt/m².

Soit P_i un émetteur de \mathcal{R} . Nous pouvons calculer les différents coûts en considérant P_i . Donnée par le modèle de la section 2, le coût en émission de P_i est donné par $\psi_i = \gamma r_i^\alpha$. Nous pouvons réécrire cette formule de sorte que $\psi_i = \tau_e \pi r_i^\alpha$ où $\tau_e = \frac{\gamma}{\pi}$. Le coût en réception induit par P_i est égal à $\tau_r \pi r_i^2$, c'est à dire le coût en réception relatif multiplié par l'aire couverte par l'émission qui est égale à l'aire de $D(P_i, r_i)$. Si nous fixons $\alpha = 2$, nous pouvons calculer le coût complet associé à l'émetteur P_i qui est égal à $\tau_e \pi r_i^2 + \tau_r \pi r_i^2 = \tau \pi r_i^2$. Enfin, pour le recouvrement \mathcal{R} entier, nous fixons l'origine O du plan et nous posons :

Definition 3. Le coût absolu du recouvrement \mathcal{R} est : $\sum_{i \in I} \text{Coût complet de l'émetteur } P_i$. Le coût relatif du recouvrement \mathcal{R} est : $\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{i \in I, P_i \in D(O, t)} \text{Coût complet de l'émetteur } P_i}{\text{aire}(A \cap D(O, t))}$

Remarque : À priori, la limite n'existe pas (on peut facilement construire des recouvrements tels qu'ils n'y ait pas de limite), c'est pourquoi il faut parler de limite supérieure. Cela dit, les recouvrements que nous considérons ont une certaine régularité (voir la partie exemple) et, pour ces recouvrements, la limite existe.

Remarque : Dans cette étude mathématique, nous supposons que la répartition des individus est homogène. Si ce n'est pas le cas, il faut remplacer la constante ρ par une fonction intégrable $\rho : A \rightarrow \mathbb{R}^+$. Le coût de réception d'un émetteur P_i devient $\int_{D(P_i, r_i)} \lambda \rho(x, y) dx dy$. Alors on ne peut plus parler d'un coût de réception relatif mais d'une *fonction* coût de réception relative $\tau_r = \lambda \rho$.

3 Contributions

L'objectif de cette étude est de **trouver un recouvrement centralisé de A dont le coût relatif est le plus petit possible**. Dans la suite, seule la constante de coût complet relatif τ sera utilisée. Nous fixons un sous ensemble ouvert A de \mathbb{R}^2 dont la frontière est C^1 par morceaux.

Theorem 1. (i) *Le coût relatif de tout recouvrement de A est supérieur ou égal à τ . Si A est borné, il est strictement supérieur à τ .* (ii) *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un recouvrement connexe de A dont le coût relatif est compris entre τ et $\tau + \varepsilon$.* (iii) *Il existe un recouvrement connexe du plan dont le coût relatif est égal à τ .*

3.1 Exemples de recouvrements

Les applications visées sont, entre autres, les réseaux de surveillance (application militaire) ou des réseaux de surveillance sismiques (application civile) pour lesquelles la topologie peut-être simple et/ou régulière. Nous supposons qu'il est possible de placer les senseurs et non de les répandre aléatoirement. Même si cela n'est pas toujours envisageable, il y a des scénarios d'applications militaires comme décrits dans [MRK⁺04] pour lesquels il est possible d'avoir un contrôle complet du placement des nœuds.

Recouvrements périodiques

Definition 4. *Un recouvrement \mathcal{R} indicé par I est dit périodique s'il existe un ensemble fini $J \subset I$ et deux vecteurs u, v de \mathbb{R}^2 tels que : (i) $\mathcal{R} = \cup_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} \{D(P_j + mu + nv, r_j), j \in J\}$ et (ii) $P_j + mu + nv = P_{j'}$ où $j, j' \in J$ et $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$, alors $j = j'$ et $(m, n) = (0, 0)$. Nous dirons que \mathcal{R} est le recouvrement de période $\{D(P_j, r_j), j \in J\}$ engendré par u et v .*

Pour calculer le coût relatif d'un recouvrement périodique, on peut considérer un compact $B \subset \mathbb{R}^2$ tel que $\mathbb{R}^2 = \cup_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} B + mu + nv$ et tel que l'intérieur de B et $B + mu + nv$ sont disjoints pour tout $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$. Par exemple, on peut prendre pour B le parallélogramme de sommets $\{0, u, v, u + v\}$. On a alors :

Proposition 1. *Le coût relatif de \mathcal{R} vaut :*
$$\frac{\sum_{j \in J} \pi r_j^2}{\text{aire}(B)} \tau \quad (1)$$

Recouvrements semi-périodiques

Definition 5. *Considérons un recouvrement périodique \mathcal{R} de période $\{D_1, \dots, D_k\}$ engendré par u et v . Donnons nous aussi une partition finie de \mathbb{Z}^2 en r sous-ensembles : $\mathbb{Z}^2 = Z_1 \cup \dots \cup Z_r$.*

On peut obtenir un nouveau recouvrement en déplaçant de manière régulière chaque disque $D_i + mu + nv$ selon l'appartenance de (m, n) à l'un des Z_i . Précisément avec kr vecteurs $w_{j,l}$ nous posons : $\forall j \in J, (m, n) \in \mathbb{Z}^2$, si $j \in J_l$ alors $D'_{j,m,n} = D_j + mu + nv + w_{j,l}$. Nous définissons aussi $\mathcal{R}' = \{D'_{j,m,n}, j, m, n \in J \times \mathbb{Z}^2\}$. Si \mathcal{R}' est un recouvrement du plan, nous dirons qu'il est semi-périodique de période J , engendré par u et v et modifié selon la partition Z_1, \dots, Z_r et les vecteurs $w_{j,l}$.

Proposition 2. *Un recouvrement semi-périodique a le même coût que tout recouvrement périodique dont il est issu.*

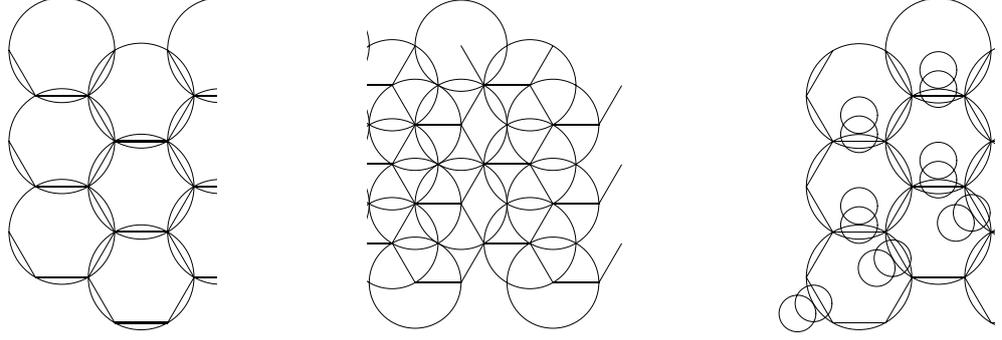


FIG. 1: (a) Recouvrement hexagonal simple (coût $\simeq 1,210\tau$). (b) Recouvrement hexagonal connexe (coût $\simeq 2,418\tau$). (c) Recouvrement hexagonal centralisé (coût $\simeq 1,533\tau$).

Recouvrements hexagonaux Les recouvrements hexagonaux sont des recouvrements semi-périodiques engendrés par les vecteurs $u = (\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ et $v = (0, \sqrt{3})$. Nous notons B l'hexagone de centre $(0, 0)$ dont les six sommets sont $(1, 0), (-1, 0), (\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2})$. On voit que les translats de B par $\mathbb{Z}u + \mathbb{Z}v$ pavent le plan, ce qui nous permet d'appliquer la formule 1. L'hexagone B est inscrit dans le cercle de rayon 1 centré à l'origine. La longueur de ses côtés est 1. L'aire de B se calcule en découpant B en triangles et vaut $\text{aire}(B) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Recouvrement hexagonal simple C'est le recouvrement \mathcal{R}_5 de période $\{D(O, 1)\}$ engendré par le groupe $\mathbb{Z}u + \mathbb{Z}v$ où u et v sont définis ci-dessus. Il est représenté dans la figure 1(a). D'après la formule 1 son coût est : $\text{coût}(\mathcal{R}_5) = \frac{\pi 1^2}{\frac{3\sqrt{3}}{2}} \tau = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \tau \simeq 1,210\tau$.

Recouvrement hexagonal connexe Pour obtenir un recouvrement connexe, on peut choisir de garder le même rayon mais de déplacer le cercle aux sommets des hexagones. Il faut alors en doubler la fréquence. On obtient le recouvrement périodique \mathcal{R}_6 de la figure 1(b). Sa période est $\{D((1, 0), 1), D((\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}), 1)\}$. Il est encore engendré par u et v et son coût est le double du revêtement \mathcal{R}_5 c'est à dire : Coût de $\mathcal{R}_6 = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} \tau \simeq 2,418\tau$.

Recouvrement hexagonal centralisé C'est le recouvrement \mathcal{R}_7 présenté à la figure 1(c) Il est semi-périodique et nous pouvons l'obtenir à partir du recouvrement périodique engendré par les vecteurs canoniques et de période : $\{D_1 = (O, 1), D_2 = (O, \frac{\sqrt{3}-1}{2}), D_3 = ((1, 0), \frac{\sqrt{3}-1}{2})\}$. Son coût est : $\text{coût}(\mathcal{R}_7) = \frac{\pi 1^2 + 2\pi(\frac{\sqrt{3}-1}{2})^2}{\frac{3\sqrt{3}}{2}} = \frac{6-2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} \pi \tau \simeq 1,533\tau$.

3.2 Preuve du théorème

Les exemples vus ci-dessus montrent que, partant d'un recouvrement non centralisé, on peut obtenir un recouvrement centralisé en ajoutant des « petits disques » pour connecter les émetteurs entre eux. De plus, en réduisant la taille des petits cercles et en augmentant leur nombre, on parvient à réduire le coût. C'est cette idée qui conduit à la preuve du théorème. Nous ne donnerons ici qu'une idée de la preuve pour le cas où A est un carré ouvert $] - 1, 1[\times] - 1, 1[$. La preuve complète est disponible dans [CFM04].

Définition 6. Soit \mathcal{R} un recouvrement (non nécessairement centralisé) d'une région A . Nous appelons lien pour \mathcal{R} tout ensemble de disques \mathcal{L} tel que $\mathcal{R} \cup \mathcal{L}$ est un recouvrement centralisé de A .

lemme 1. Soit \mathcal{R} un recouvrement de A , de coût relatif γ et ε un réel strictement positif. Il existe un lien \mathcal{L} pour \mathcal{R} tel que : $\text{coût}(\mathcal{R} \cup \mathcal{L}) < \gamma + \varepsilon$.

lemme 2. Soit $\eta > 0$, il existe un recouvrement du plan de coût relatif inférieur à $\tau + \eta$.

lemme 3. Il existe une suite de disques D_n contenus dans A dont les intérieurs sont disjoints deux à deux et tels que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Aire}(D_n) = \text{Aire}(A)$.

Nous supposons fixée une telle suite de disques D_n , de périmètres a_n donnés. Nous posons $\alpha = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$. C est la constante de densité du recouvrement hexagonal simple.

lemme 4. *Soit une région fermée d'aire B dont la frontière (qui admet éventuellement plusieurs composantes connexes) est C^1 par morceaux et de longueur l . Alors pour tout $\eta > 0$ il existe un recouvrement de B de coût inférieur à $\alpha(\text{Aire}(B) + l\eta + O(\eta^2))\tau$*

PREUVE : On épaissit un peu la région B en considérant la région B' des points à distance inférieure à η de B . L'aire de cette région B' vaut : $\text{Aire}(B) + l\eta + O(\eta^2)$ (le terme en η^2 provient de la courbure de la frontière). On recouvre B à l'aide du pavage hexagonal simple, en prenant des hexagones de côté η . Le recouvrement déborde un peu mais reste dans la région B' . Son coût est donc inférieur à $\alpha(\text{Aire}(B) + l\eta + O(\eta^2))\tau$. \square

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $C_n = \cup_{i=1}^n D_i$ et on recouvre $A - C_n$ comme dans le lemme ci-dessus pour un certain η . La frontière de $A - C_n$ est de longueur $c_n = 8 + a_1 + \dots + a_n$ (le terme 8 provient de la longueur des 4 côtés du carré). Soit \mathcal{P}_n le recouvrement obtenu. On a : Coût $\mathcal{P}_n \leq (\text{Aire}(C_n) + \alpha(\text{Aire}(A - C_n) + c_n\eta + O(\eta^2)))\tau$. Pour un ε fixé, on peut toujours choisir n en sorte que $\text{Aire}(C_n) + \alpha(\text{Aire}(A - C_n) - \text{Aire}(A)) < \varepsilon/2$. Un tel n étant fixé, on peut toujours choisir η en sorte que $\alpha(c_n\eta + O(\eta^2))$ soit aussi inférieur à $\varepsilon/2$. Ceci prouve le théorème pour le carré.

4 Conclusion

Nous avons proposé un modèle analytique pour les réseaux de senseurs où l'utilisation d'une distribution continue de capteurs permet la dérivation de bornes supérieures et inférieures pour les problèmes de couverture et de *broadcast* en énergie minimum. L'étude mathématique présentée dans les sections 3 et 3.1 peut-être directement appliquée si les senseurs sont placés, en opposition à dispersés, sur la région à couvrir. Les propositions 1 et 2 fournissent une méthode analytique pour calculer et comparer le coût relatif en énergie d'un réseau de senseurs si le réseau respecte un schéma périodique ou pseudo-périodique. Cette méthode se révèle utile pour les problèmes de mesure et de *broadcast* avec consommation minimum d'énergie. Un autre résultat important est donné par le théorème 1. Les points 1 et 2 affirment que pour toute région à couvrir et pour toute couverture de cette région, la consommation d'énergie est supérieure à τ . Cependant, la borne τ se révèle être une limite inférieure et peut être approchée. La caractéristique principale de notre modèle est que le coût en réception associé à une émission est directement proportionnel à l'aire couverte par l'émission. En d'autres termes, ce modèle considère une population continue de senseurs. Si cette considération est appropriée pour des opérations de mesure, elle est moins réaliste pour les opérations de *broadcast*.

Pour le futur, une généralisation des résultats analytique doit être apportée dans le cas d'une distribution discrète et donc plus réaliste de senseurs. Afin également de se rapprocher d'avantages à la réalité des réseaux de senseurs, nous souhaitons limiter les puissances de transmission disponibles à un ensemble discret et fini de valeurs. Ces puissances d'émissions remplaceraient l'intervalle continu de puissances $[0, \Phi_{\max}]$. Finalement, une attention toute particulière doit être apportée afin de cerner correctement la notion de durée de vie d'un réseau. Correctement définir cette notion offre deux avantages. D'abord cela permet d'évaluer et de comparer réellement les performances des algorithmes de communications. Ensuite, cela offre généralement des indices précieux pour la conception de protocoles de communication efficaces. Dans cette recherche, il ne faut néanmoins pas perdre à l'esprit que, bien plus fortement que pour les réseaux *ad hoc*, les contraintes et les exigences sont fortement liées aux applications. Comme pour les réseaux *ad hoc*, une solution *one-fits-all* n'est donc pas à espérer.

Références

- [BM03] S. Banerjee and A. Misra. Energy-efficient broadcast and multicast trees for reliable wireless communication. In *IEEE Wireless Communications and Networking Conference (WCNC)*, New Orleans, USA, March 2003.
- [BSM03] S. Bansal, R. Shorey, and A. Misra. Comparing the routing energy overheads of ad-hoc routing protocols. In *IEEE Wireless Communications and Networking Conference (WCNC)*, New Orleans, USA, March 2003.

- [BZ02] L. Badia and M. Zorzi. On the construction of broadcast and multicast trees in wireless networks - global vs. local energy efficiency. In *IEEE GLOBECOM2002*, 2002.
- [CFM04] G. Chelius, E. Fleury, and T. Mignon. Lower and upper bounds for minimum energy broadcast and sensing problems in sensor networks. RR RR-5072, INRIA, January 2004.
- [CPS99] A. Clementi, P. Penna, and R. Silvestri. Hardness results for the power range assignment problem in radio networks. In *International Workshop on Approximation Algorithms for Combinatorial Optimization Problems (RANDOM/APPROX'99)*, volume 1671 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 197–208. Springer-Verlag, 1999.
- [DBT03] O. Dousse, F. Baccelli, and P. Thiran. Impact of interferences on connectivity in ad hoc networks. In *INFOCOM 2003*. IEEE, 2003.
- [FL94] P. Fraigniaud and E. Lazard. Methods and problems of communication in usual networks. *Discrete Applied Mathematics*, 53 :79–133, 1994. (special issue on broadcasting).
- [MRK⁺04] V. Mhatre, C. Rosenberg, D. Kofman, R. Mazumdar, and N. Shroff. Design of surveillance sensor grids with a lifetime constraint. In *European Workshop on Wireless Sensor Networks (EWSN)*, January 2004.
- [Rap96] T. Rappaport. *Wireless Communication, Principles and Practice*. Prentice-Hall, 1996.
- [SCI⁺01] E. Shih, S. Cho, N. Ickes, R. Min, A. Sinha, A. Wang, and A. Chandrakasan. Physical layer driven protocol and algorithm design for energy-efficient wireless sensor networks. In *ACM MobiCom' 01*, pages 272–286, Roma, Italy, July 2001.
- [T64] F Tóth. Regular figures. In *International Series of Monographs in Pure and Applied Mathematics*. Pergamon Press, 1964.
- [uHE03] M. Čagalj, J.-P. Hubaux, and C. Enz. Energy-efficient broadcasting in all-wireless networks. *ACM Mobile Networks and Applications (MONET)*, 2003.
- [WCLF02] P.-J. Wan, G. Călinescu, X.-Y. Li, and O. Frieder. Minimum-energy broadcasting in static ad hoc wireless network. *Wireless Networks*, 8 :607–617, 2002.
- [WNE02] J. Wieselthier, G. Nguyen, and A. Ephremides. Energy-efficient broadcast and multicast trees in wireless networks. *MONET*, 7(6) :481–492, 2002.