Assignation de fréquences et étiquetage $(d,1)$-total dans les topologies planaires

Fabrice Bazzaro et Mickaël Montassier

LaBRI UMR CNRS 5800, Université Bordeaux I.
FRANCE

L'un des problèmes importants des réseaux sans fil repose sur les assignations de fréquences. Ces dernières années, les études sur le sujet ont été très importantes et pour modéliser un cas particulier de ce problème, on peut utiliser l'étiquetage $(d,1)$-total de graphes [HY02]. Nous nous sommes donc intéressés à la bande de fréquence la plus petite nécessaire (nombre $(d,1)$-total λ_d^T) pour avoir une assignation de fréquence sans interférence dans les topologies représentables par des graphes planaires. Nous représentons les fréquences par des étiquettes. Une assignation de fréquence est sans interférence si l'étiquetage des sommets et des arêtes de G avec des entiers positifs vérifie les propriétés suivantes : deux sommets adjacents ont des étiquettes différentes, deux arêtes adjacentes ont des étiquettes différentes et, un sommet et une arête lui étant incidente ont des étiquettes dont la différence est au moins d. On prouve que pour les graphes planaires de grande maille et de grand degré maximum Δ, on a $\lambda_d^T(G) \leq \Delta + 2d - 2$. Ce résultat est optimal pour $d = 2$.

Keywords: Etiquetage total

1 Introduction

Plusieurs problèmes d'assignation de fréquences existent, en effet, selon le type de réseau de communication sans fil considéré (radio, télévision, téléphones portables, cellulaires par satellite, ...), les contraintes régissant ce réseau ne sont pas les mêmes. Nous étudions le problème d'assignation de fréquences qui se pose dès lors que l'on souhaite établir des connexions dans un réseau d'émetteurs en amont de la phase de communication. Chaque connexion doit être effectuée sur une fréquence particulière qui tient compte des contraintes relatives au réseau. Dans la pratique, pour une connexion entre deux émetteurs, on utilise deux fréquences : une pour chaque émetteur. Ces fréquences sont choisies parmi un ensemble de fréquences autorisées par l'émetteur, en tenant compte de préférences pouvant être fixées, de règles de régulation, des caractéristiques physiques des émetteurs et des interférences pouvant se produire. De plus, au niveau global, le spectre de fréquences est une ressource limitée, le réseau doit donc utiliser la plus petite bande de fréquences possible. Nous nous intéressons aux problèmes d'interférences se produisant dans les situations suivantes :

– si deux émetteurs sont très proches géographiquement, ils doivent utiliser des fréquences éloignées pour effectuer leurs transmissions ;
– si deux émetteurs sont un peu plus éloignés, ils doivent utiliser des fréquences différentes.

Un moyen "classique" d'étudier ce problème est d'utiliser des graphes. Dans ces graphes, les sommets représentent les émetteurs, les arêtes lient les sommets entre lesquels des interférences sont susceptibles de se produire. Nous modélisons ce problème de la façon suivante : on étiquette le graphe à l'aide d'entiers de telle façon que deux sommets à distance deux ont des étiquettes différentes et deux sommets voisins ont des étiquettes distantes d'au moins deux. Ce type d'étiquetage est appelé $L(2,1)$-étiquetage. Il a été introduit par Griggs et Yeah [GY92] et a été par la suite généralisé en un $L(p,q)$ étiquetage. Les valeurs de p et de q sont directement liées à la quantification de la proximité des fréquences produisant des interférences. Dans le modèle, on obtient donc, que deux sommets voisins doivent avoir leurs étiquettes distantes d'au moins p et deux sommets à distance deux doivent avoir leurs étiquettes à distance au moins q (en général, $p \geq q$). La bande de fréquences étant une ressource limitée, l'objectif est d'avoir la plus petite plage d'étiquettes $\lambda_{p,q}(G)$ (correspondant à la différence entre la plus grande et la plus petite fréquence / étiquette assignée).

De nombreux articles étudient cet étiquetage appliqué à des graphes simples. On va s'intéresser plus particulièrement au $L(2,1)$-étiquetage de graphes d'incidence [WGM95]. Le graphe d'incidence G' d'un graphe G est le graphe obtenu en remplaçant toute arête de G par une chaîne de longueur deux. Le $L(d,1)$-étiquetage du graphe d'incidence d'un graphe G correspond à un étiquetage total particulier de G, l'étiquetage $(d,1)$-total introduit par Havet et Yu [HY02, Hav03]. Formellement l'étiquetage $(d,1)$-total d'un graphe $G = (V,E)$ est une application $c : V \cup E \rightarrow \mathbb{N}$ vérifiant :

(i) $\forall(u,v) \in V^2 : uv \in E \Rightarrow c(u) \neq c(v)$

(ii) $\forall(u,v,w) \in V^3 : uv \in E, uw \in E \Rightarrow c(uv) \neq c(uw)$

(iii) $\forall(u,v) \in V^2 : uv \in E \Rightarrow |c(u) - c(uv)| \geq d$

La taille du plus petit intervalle nécessaire pour cet étiquetage de G est appelé nombre $(d,1)$-total, noté $\lambda_d^T(G)$.

Par la suite, on ne considérera que des graphes connexes et simples. On utilisera $\chi(G)$ (resp. $\chi'(G)$) pour le nombre chromatique de G (resp. l'indice chromatique de G), $d_G(v)$ (resp. $\Delta(G)$) pour le degré d'un sommet v de G (resp. le degré maximum de G) ou $d(v)$ (resp. Δ) lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté. On appelle un *k-sommet* un sommet de degré k. Le nombre d'arêtes délimitant une face f est dénoté par $r(f)$ (taille de la face). On appelle la maille g d'un graphe la taille d'un plus petit cycle.

L'étiquetage $(1,1)$-total n'étant qu'une coloration totale, a été beaucoup étudié [Vij71, Ros71, BKW97, BKW96, BKW98, IZN01]. Nos résultats étendent dans un certain sens les résultats de Borodin, Kostochka et Woodall concernant la coloration totale des graphes planaires avec une grande maille [BKW98] et avec un grand degré maximum [BKW96] ; on utilise certaines techniques de ces articles.

En section 2, on présente des résultats et conjectures connus, d'où on tirera quelques observations importantes. En section 3, on donne des indications de preuve pour le théorème principal. Et enfin, en section 4, on pose une conjecture. Pour des preuves complètes du théorèmes et des divers lemmes, voir [BMR03]

2 Premiers résultats et conjectures

Comme on l'a vu précédemment, le $L(d,1)$-étiquetage d'un graphe d'incidence G' d'un graphe G est un étiquetage $(d,1)$-total de G. Il est aisé de voir :

Observation 1 *Soit G un graphe, $\lambda_d^T(G) = \lambda_{d,1}(G')$ où G' est le graphe d'incidence de G.*

Cette observation donne quelques majorations dans le cas où $d = 2$ en utilisant les bornes issues du $L(2,1)$-étiquetage. De plus, si G est planaire, G' l'est aussi d'où :

Lemme 1 *Soit G un graphe planaire, alors*

(i) $\lambda_2^T(G) \leq \lambda_{2,1}(G') \leq 2\Delta + 25$ *[vdHM03]*

(ii) $\lambda_2^T(G) \leq \lambda_{2,1}(G') \leq \frac{5}{3}\Delta + 90$ *[MS02]*

On donne maintenant des résultats connus et importants donnant une minoration :

Proposition 1 *[Hav03] Soit G un graphe de degré maximum Δ, alors*

(i) $\lambda_d^T(G) \geq \Delta + d - 1$ *;*

(ii) si G est Δ-régulier, $\lambda_d^T(G) \geq \Delta + d$ *;*

(iii) si $d \geq \Delta$, $\lambda_d^T(G) \geq \Delta + d$.

Observons que l'on peut colorer les sommets avec un intervalle I_v de $\chi(G)$ couleurs et les arêtes avec un intervalle I_e de $\chi'(G)$ couleurs, I_v et I_e séparés par un intervalle de taille $d-1$. De la proposition 2 et de cette observation, on déduit une majoration :

Proposition 2 *[Hav03] Soit G un graphe, alors :*

(i) $\lambda_d^T(G) \leq \chi(G) + \chi'(G) + d - 2$ *;*

(ii) $\lambda_d^T(G) \leq 2\Delta + d - 1$.

Pour un graphe biparti, $\chi'(G) = \Delta$ [Kön16] ; par la proposition 2, on obtient :

Corollaire 1 (Graphes bipartis) *Soit G un graphe biparti, alors :*

$$\Delta + d - 1 \leq \lambda_d^T(G) \leq \Delta + d$$

Si G est régulier ou si $d \geq \Delta$, alors $\lambda_d^T(G) = \Delta + d$. Dans le cas des graphes planaires, en utilisant le théorème des quatre couleurs, on obtient par la proposition 2 le corollaire suivant :

Corollaire 2 (Graphes planaires) *Soit G un graphe planaire simple, alors :*

$$\lambda_d^T(G) \leq \Delta + d + 3$$

Maintenant pour un graphe planaire, si $\Delta \geq 8$, alors $\chi'(G) = \Delta$ [Viz64] et si $g \geq 4$, alors $\chi(G) = 3$ [Grö59] : les majorations deviennent $\Delta + d + 1$. Pour un graphe planaire extérieur différent d'un cycle impair, $\chi'(G) = \Delta$ et $\chi(G) = 3$.

Corollaire 3 (Graphes planaires extérieurs) *Soit G un graphe planaire extérieur, alors*

$$\lambda_d^T(G) \leq \Delta + d + 1$$

On a le même résultat pour les cycles impairs [HY02].

Pour un graphe s-dégénéré, $\chi(G) = s + 1$.

Corollaire 4 (Graphes s-dégénérés) *Soit G un graphe s-dégénéré, alors*

$$\lambda_d^T(G) \leq \Delta + d + s$$

Donc, si $\Delta \geq 2s$, alors $\chi'(G) = \Delta$ [Viz65]. La borne devient $\Delta + d + s - 1$.

Conjecture 1 *[HY02] Soit G un graphe, alors* $\lambda_d^T(G) \leq \min\{\Delta + 2d - 1, 2\Delta + d - 1\}$.

Observation 2

1. *Si* $d \leq \Delta$*, alors* $\Delta + 2d - 1 \leq 2\Delta + d - 1$.
2. *Si* $d \geq \Delta$*, la Proposition 2* (ii) *implique la Conjecture 1.*
3. *Si* $g \geq 3$ *et* $\Delta \geq 8$*, l'observation précédente implique la Conjecture 1.*

Pour la minoration, on a :

Lemme 2 *Pour tout graphe G, de degré maximum* Δ *et de nombre chromatique* $\chi(G) \leq 2d$*, on peut construire un graphe* G' *de degré maximum* $\delta' \geq \Delta$ *et de nombre chromatique* $\chi(G') = \chi(G)$ *tel que* $\lambda_d^T(G') \geq \left\lceil \frac{\chi(G')}{2} \right\rceil + d - 2 + \Delta'$.

En particulier dans le lemme précédent, si $\chi(G) = 2d - 1$ ou $\chi(G) = 2d$, on peut construire un graphe G' nécessitant au moins $\Delta + 2d - 1$ couleurs pour un étiquetage $(d,1)$-total. En 1964/1965, Bezhad [Beh65] et Vizing [Viz64] ont conjecturé indépendamment que le nombre chromatique total est $\Delta + 1$ ou $\Delta + 2$. La Conjecture 1 peut être vue comme une extension de la conjecture de Behzad et de Vizing. De plus, les résultats obtenus par Havet et Yu [HY02] pour les graphes complets confortent la Conjecture 1.

Pour conclure cette section, on rappelle la conjecture de Havet :

Conjecture 2 *[HY02] Soit G un graphe avec* $\Delta \leq 3$*,* $G \neq K_4$*, alors* $\lambda_2^T(G) \leq 5$.

3 Résultats principaux

Théorème 1 *Soit G un graphe planaire de degré maximum* Δ *et de maille g. Alors* $\lambda_d^T(G) \leq \Delta + 2d - 2$ *dans les cas suivants :*
(i) $d \geq 2$, $\Delta \geq 2d + 1$ *et* $g \geq 11$ *;*
(ii) $\Delta \geq 2d + 2$ *et* $g \geq 6$ *;*
(iii) $\Delta \geq 2d + 3$ *et* $g \geq 5$ *;*
(iv) $d \geq 2$, $\Delta \geq 8d + 2$.

Dans chaque cas du théorème 1, si G est planaire et sans triangle, alors $\chi(G) \leq 3$; sinon, si $\Delta \geq 8$, $\chi'(G) = \Delta$ [Viz64]. Donc, la borne du Théorème 1 doit être comparée à la majoration $\Delta + d + 1$ et $\Delta + d + 2$ obtenue par le Corollaire 2. Notre majoration est meilleure pour $d = 2$ dans tous les cas et pour $d = 3$ dans les cas (i) et (iv). De plus, par le Lemme 2, ces résultats sont optimaux pour $d = 2$ vu que nous pouvons construire des graphes nécessitant $\Delta + 3$ couleurs. Pour $d = 3$, il y a un écart de un entre la borne inférieure et la borne supérieure du Théorème 1.

Indications de preuve du Théorème 1

On prouve le Théorème 1 par contradiction. Soit α un entier et $H = (V,E)$ un contre-exemple minimal au Théorème 1 avec $\Delta \geq \alpha$, de maille g ayant un nombre minimal de sommets n et d'arêtes m (dans le cas (i), $\alpha = 2d+1$ et $g \geq 11$, dans le cas (ii), $\alpha = 2d+2$ et $g \geq 6$, dans le cas (iii), $\alpha = 2d+3$ et $g \geq 5$ et dans le dernier cas, $\alpha = 8d+2$ et $g \geq 3$)

On peut montrer les trois points suivants :

Fait 1 *Si $\Delta \geq \alpha+1$, alors H n'a pas de 1-sommet.*

Fait 2 *Si $\Delta = \alpha$, alors si H a des 1-sommets, alors ils sont adjacents à un Δ-sommet de H et ce Δ-sommet est unique.*

Fait 3 *Si $\Delta = \alpha$ et $g \geq 4$, alors H contient au plus un 1-sommet.*

Pour la preuve, on utilise le résultat bien connu suivant :

Lemme 3 *Soit G un graphe planaire de degré minimum 2 et de maille $g \geq 5d+1$, alors G contient une chaîne de d 2-sommets adjacents.*

Pour la preuve et plus de détails, voir le Lemme 5 dans [NRS97].
L'étude de certains voisinages des sommets du graphe H nous permet d'exclure certains motifs (Lemmes 4, 6, 7 et 8).

Lemme 4 *Supposons $\Delta \geq 2d+1$ et $d \geq 2$, alors H ne contient pas deux 2-sommets adjacents.*

Le Lemme 4 implique le Théorème 1 (i) : soit H un contre-exemple avec $\Delta \geq 2d+1$ et $g \geq 11$. Si H a un 1-sommet v, il est adjacent à l'unique Δ-sommet (cf. Fait 3), $\Delta \geq 5$. Par le Lemme 3, $H \setminus v$ contient deux 2-sommets adjacents par conséquent H aussi ce qui est impossible par le Lemme 4. Maintenant si H n'a pas de 1-sommet, H ne contient pas deux 2-sommets adjacents par le Lemme 4 ce qui est impossible par le Lemme 3.

Lemme 5

(i) $\sum_{v\in V}((t-2)d(v)-2t) < 0$ *si* $0 < t \leq g$

(ii) $\sum_{v\in V}(d(v)-4)+\sum_{f\in F}(r(f)-4) < 0$

(iii) $\sum_{v\in V}(d(v)-6)+\sum_{f\in F}(2r(f)-6) < 0$

Ce Lemme 5 est obtenu par la formule d'Euler.
Les Lemmes 6, 7 et 8 sont des extensions naturelles des Lemmes 2 et 3 de [BKW98] et du Lemme 1 de [BKW96].
Par la suite, pour un graphe G, on notera n_i le nombre de i-sommets de G.

Lemme 6 *Dans H si $\Delta \geq 2d+2$, alors*

(i) tout 2-sommet est adjacent à deux Δ-sommets.

(ii) $n_2 < n_\Delta$.

Un contre-exemple minimal H avec $g \geq 6$ et $\Delta \geq 2d+2$ ne contient pas de 1-sommet : supposons que H contienne un 1-sommet v (adjacent à l'unique Δ-sommet, Fait 2), alors H ne contient pas de 2-sommet (par le Lemme 6 (i), un 2-sommet est adjacent à deux Δ-sommets). Et, par le Lemme 3, $H \setminus \{v\}$ contient un 2-sommet w. Donc, le sommet v est nécessairement adjacent à w ce qui contredit le fait que $\Delta \geq 2d+2$ car $\Delta = d(w) = 3$.

Le Lemme 5 (i) implique avec $t = 6$ et $\sum_{2\leq i\leq \Delta} n_i = n$ que $n_2 \geq n_4 + 2n_5 + \ldots$. Ce qui contredit le fait que $n_2 < n_\Delta$ (Lemme 6 (ii)) ce qui prouve le Théorème 1 (ii).

Lemme 7 *Dans H, si $\Delta \geq 2d+3$, alors il n'y a pas de 3-sommet adjacent à deux 3-sommets.*

L'ensemble de ces lemmes permet d'utiliser une méthode de déchargement qui, au vues des différentes configurations interdites dans un contre-exemple minimal, contredit la formule d'Euler et prouve le Théorème 1 (iii). Pour le Théorème 1 (iv), on va avoir besoin du fait et du lemme suivant :

Fait 4 *Si $\Delta(H) = 8d+2$, alors H contient au plus un 1-sommet.*

Lemme 8 *Supposons $\Delta \geq 8d+2$ et $d \geq 2$. Soit xy une arête de H avec $2 \leq d(x) \leq 5$, alors $d(x)+d(y) \geq \Delta+2$.*

Cela implique qu'une face f a au moins $\left\lceil \frac{r(f)}{2} \right\rceil$ sommets de degré $k \geq 6$ sur sa frontière. En utilisant à nouveau une procédure de déchargement, on obtient une contradiction avec le Lemme 5 (iii) complétant ainsi la preuve du théorème 1 (iv).

4 Conclusion

On a donc prouvé que l'on peut obtenir des majorations intéressantes pour l'assignation de fréquences basée sur le modèle d'étiquetage $(d,1)$-total de topologies planaires. Ces résultats sont optimaux lorsque le paramètre d est égal à deux et optimal ou à un de l'optimalité lorsque d vaut trois. Ceci nous permet de proposer la conjecture suivante :

Conjecture 3 *Pour tout graphe planaire sans triangle G avec* $\Delta \geq 3$, $\lambda_d^T(G) \leq \Delta + d$.

D'un point de vue applicatif, la validation de cette conjecture permettrait d'étendre ces résultats à un plus large panel de réseaux sans fil.

References

[Beh65] M. Behzad. *Graphs and their chromatic numbers*. PhD thesis, Michigan State University, 1965.

[BKW96] O.V. Borodin, A.V. Kostochka, and D.R. Woodall. Total colorings of planar graphs with large maximum degree. *Journal of graph theory*, pages 53–59, 1996.

[BKW97] O.V. Borodin, A.V. Kostochka, and D.R. Woodall. List edge and list total colourings of multigraphs. *Journal of combinatorial theory, Series B*, 71 :184–204, 1997.

[BKW98] O.V. Borodin, A.V. Kostochka, and D.R. Woodall. Total colourings of planar graphs with large girth. *Europ. J. Combinatorics*, 19 :19–24, 1998.

[BMR03] F. Bazzaro, M. Montassier, and A. Raspaud. $(d,1)$-total labelling of planar graphs with large girth and high maximum degree. Technical Report RR-1307-03, LaBRI, 2003. Soumis à Discrete Math.

[Grö59] H. Grötzsch. Ein dreifarbensatz für dreikreisfreie Netze auf der Kugel. *Math.-Nat. Reihe*, 8 :109–120, 1959.

[GY92] J.R. Griggs and R.K. Yeh. Labelling graphs with a condition at distance two, SIAM. *J. Discrete Math*, 5 :586–595, 1992.

[Hav03] F. Havet. $(d,1)$-total labelling of graphs. Workshop Graphs and Algorithms, Dijon (FRANCE), 2003.

[HY02] F. Havet and M.-L. Yu. $(d,1)$-total labelling of graphs. Technical Report 4650, INRIA, 2002.

[IZN01] S. Isobe, X. Zhou, and T. Nishizeki. Total colorings of degenerated graphs. In *ICALP 2001*, pages 506–517, 2001.

[Kön16] D. König. Über graphen und ihre anwendug auf determinantentheorie und mengenlehre. *Math. Ann.*, 77 :453–465, 1916.

[MS02] M. Molloy and M.R. Salavatipour. Frequency channel assignment on planar networks. In *ESA 2002*, pages 736–747, 2002.

[NRS97] J. Nesetril, A. Raspaud, and E. Sopena. Colorings and girth of oriented planar graphs. *Discrete Math.*, 165-166 :519–530, 1997.

[Ros71] M. Rosenfeld. On the total coloring of certain graphs. *Israel J. Math.*, 9 :396–402, 1971.

[vdHM03] J. van den Heuvel and S. McGuinness. Colouring the square of a planar graphs. *J. of Graph Theory*, 42 :110–124, 2003.

[Vij71] N. Vijayaditya. On total chromatic number of a graph. *J. London Math. Soc*, 3(2) :405–408, 1971.

[Viz64] V. G. Vizing. On the estimate of the chromatic class of a p-graphs (in Russian). *Metody Diskret. Analiz.*, 3 :25–30, 1964.

[Viz65] V. G. Vizing. Critical graphs with given chromatic class (in Russian). *Metody Diskret. Analiz.*, 5 :9–17, 1965.

[WGM95] M.A. Whittlesey, J.P. Georges, and D.W. Mauro. On the λ-number of Q_n and related graphs, SIAM. *J. Discrete Math*, 8 :449–506, 1995.