Algorithmes pour le problème d'expansion de réseau sur deux couches

Benoit Lardeux[†], Jérôme Geffard et Arnaud Knippel[‡]

France Telecom R&D, Laboratoire DAC/OAT, 38-40 rue du Général Leclerc, 92794 Issy-les-Moulineaux, France

Dans ce document, nous présentons un problème complexe d'optimisation dans les télécommunications: le problème d'expansion de réseau sur deux couches à coûts discrets. Un modèle mathématique original est proposé ainsi que deux méthodes de résolution. La première méthode est exacte et utilise un shéma de décomposition de type Benders pour dimensionner simultanément les deux couches du réseau. L'autre méthode, inspirée du fonctionnement des méthodes opérationnelles, fournit une solution réalisable construite en deux phases. La comparaison des solutions approchées avec les solutions optimales nous permet de définir les caractéristiques de réseaux qui influencent la performance de cette heuristique opérationnelle.

Keywords: programmation linéaire en nombres entiers, multiflot, dimensionnement de réseau

1 Introduction

Un opérateur de télécommunications doit construire un réseau satisfaisant l'ensemble des demandes de services à échanger entre les clients. Les problèmes de synthèse de réseau sont des problèmes complexes. Pour les traiter, un opérateur met en œuvre des processus basés sur l'expertise, qui peuvent être vue comme des heuristiques. L'objet de cette communication est de comparer une heuristique, utilisée dans les télécoms pour effectuer un dimensionnement multicouche d'un réseau, à une résolution exacte. Les performances de l'heuristique peuvent ainsi être évaluées sur de petites instances.

Dans le cas d'un réseau IP (Internet Protocol) supporté par un réseau optique WDM (wavelength division multiplexing), les routeurs et les systèmes de paires de fibres sont les composants essentiels assurant un trafic organisé. En effet, un réseau IP est constitué de routeurs interconnectés par des liens possédant de la bande passante disponible. Afin d'assurer l'échange simultané de nombreuses informations, l'opérateur connecte un ensemble de cartes de capacités suffisantes sur les routeurs du réseau. Les capacités des cartes sont généralement de 2,5, 10 ou 40 Gbit. Un réseau de transport optique (OTN) fournit la bande passante nécessaire. Il est constitué de systèmes WDM connectés entre eux par des brasseurs optiques. Un système WDM réalisé sur une paire de fibre optique transporte 32 longueurs d'ondes, chacune capable d'écouler 2,5 Gbit (ingénierie WDM à 2G5). Un objectif important de l'opérateur est d'installer judicieusement les composants dans le réseau pour que le coût global soit minimal. Ce problème peut être modélisé comme un problème de réseau sur deux couches: la couche IP qui est encapsulée dans la couche de transmission optique (voir [HGMY91]).

Dans les réseaux de télécommunication, des demandes de services sont à échanger entre toutes les paires de routeurs. L'ensemble de ces quantités d'information devant être routées forme une matrice de demandes. Ces demandes sont non-miscibles et routées simultanément. Le dimensionnement de la couche IP correspondrait à un multiflot classique, si la bande passante inter-routeurs n'était pas mise en œuvre par un

[†]Laboratoire Heudiasyc, Centre de Recherche de Royallieu, 60205 Compiègne, France.
[‡]LIP6 ANP/MOS, 8 rue du Capitaine Scott, 75015 Paris.

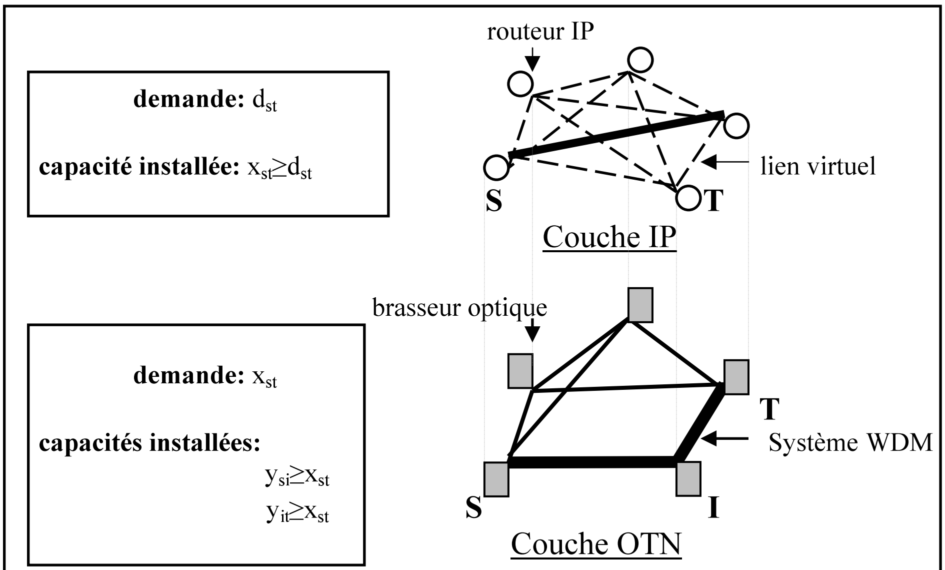

Figure1: dimensionnement d'une couche IP sur une couche OTN pour un flot

réseau sous-jacent: OTN. Un lien IP est dit virtuel, dans le sens où il constitue une demande acheminée sur le réseau support (voir figure 1). La valeur de cette demande est la valeur de capacité installée sur le lien virtuel IP. Le dimensionnement des liens virtuels forme la matrice de demande pour la couche de transmission. Cette nouvelle matrice des demandes est routée sur la deuxième couche. Il nous faut également dimensionner cette deuxième couche, de telle sorte que le deuxième multiflot soit réalisable.

En pratique, les opérateurs ne cherchent pas un dimensionnement optimal à partir d'une topologie vierge. Une augmentation de la bande passante disponible peut devenir nécessaire lorsque la valeur globale de la demande augmente d'une année à l'autre. Les quantités de services échangés étant en forte croissance dans le réseau internet, les plans de routage doivent être révisés ainsi que le dimensionnement des liens. Les installations de nouveaux équipements sont choisies à partir d'un réseau existant permettant l'écoulement des demandes initiales. Le nouveau réseau doit être adapté à la nouvelle matrice de traffic en s'appuyant sur la topologie existante. Ce problème dit d'expansion de réseau est un cas particulier du problème de dimensionnement. Il peut donc être résolu avec les mêmes outils.

Dans la première partie, nous rappelons brièvement les travaux présentés dans [KLG03]. Une méthode exacte de résolution du problème de dimensionnement sur deux couches est présentée. Il s'agit simplement de montrer le type de technologie utilisée. La deuxième partie illustre une méthode opérationnelle utilisée dans l'industrie des télécommunication. Enfin des résultats numériques contribueront à analyser sa performance en fonction de différents paramètres du problème.

2 Modèle et méthode exacte de résolution

Le problème de dimensionnement de coût minimal d'un réseau est souvent modélisé avec des variables de multiflot. Les formulations "noeuds-arêtes" ou "arêtes-chaines" sont alors souvent utilisées pour exprimer les contraintes. Ces contraintes peuvent être écrites différemment en projetant les variables de multiflots sur les variables de capacité. Nous obtenons une formulation dite "capacité" avec un nombre de variables moins important. Pour plus de détails, voir [GM95].

Dans le cas du problème sur deux couches, deux graphes $G(V,E)$ et $\tilde{G}(V,\tilde{E})$ représentent les deux couches. V est l'ensemble des noeuds, c'est à dire les routeurs dans l'application télécom. E (resp. $\tilde{E}$) représente l'ensemble des liens de la première couche (resp. deuxième couche) et $x_E \in D^E$ (resp. $y_{\tilde{E}} \in \tilde{D}^{\tilde{E}}$), les valeurs entières de capacité sur chaque lien. D^E (resp. $\tilde{D}^{\tilde{E}}$) sont les ensembles de valeurs de capacité disponibles pour la première (resp. deuxième) couche. Dans l'application IP/OTN, il s'agit des combinaisons potentielles de paires de cartes installées sur les routeurs placés aux extrémités des liens pour la première couche. Les capacités disponibles pour les liens de la deuxième couche sont en fait les combinaison de capacité de plusieurs longueurs d'ondes pouvant être choisis pour les liens WDM. $\Phi(x)$ (resp. $\Psi(y)$) est la fonction de coût croissante et constante par morceaux pour les liens de la première couche (resp. deuxième couche). L'ensemble des demandes de services est exprimé par la matrice des demandes $d_{ij}, \forall (i,j) \in V^2, i \neq j$. le programme linéaire en nombres entiers généralisé que nous avons résolu s'écrit comme suit:

$$
(ILP)\left\{\begin{array}{lllll}
Minimize & z = \sum_{e\in E} \Phi(x_e) + \sum_{e\in \tilde{E}} \Psi(y_e) & & & \\
s.t.: & & & & \\
& \sum_{e=(ij)\in E} \lambda^l_{ij}.x_e \geq \sum_{1\leq i<j\leq n} \lambda^l_{ij} d_{ij} & \forall l \in L_1 & & (C1) \\
& \sum_{e=(ij)\in \tilde{E}} \mu^l_{ij}.y_e - \sum_{e=(ij)\in E} \mu^l_{ij}.x_e \geq 0, & \forall l \in L_2 & & (C2) \\
& x_e \in D_e \qquad \forall e \in E & & (D1) & \\
& y_e \in \tilde{D}_e \qquad \forall e \in \tilde{E} & & (D2) &
\end{array}\right.
$$

où pour tout $l \in L_1$ (resp. $l \in L_2$), λ^l (resp. μ^l) est un rayon extrême du cône métrique MET_n, qui contient tous les vecteurs λ définissant une semi-distance sur les cliques de n sommets :

$$
MET_n = \{\lambda \in R_+^{n(n-1)/2} \quad |\lambda_{ij} \leq \lambda_{ik} + \lambda_{kj}, \quad \forall i \in \{1,...,n-1\}, j \in \{i+1,...,n\}, k \in \{1...n\} - \{i,j\}\}
$$

Bien que le nombre de rayons extrêmes du cône métrique MET_n n'augmente que polynômialement en fonction de la taille n du graphe, ce nombre augmente tout de même assez vite. Or, nous ne souhaitons pas tenir compte de toutes les inégalités de type (C1) ou (C2). C'est pourquoi (ILP) est résolu optimalement grâce à un processus de génération de contraintes séparant seulement les inégalités métriques les plus violées. A chaque itération, le problème (ILP) relaxé est résolu optimalement. Les inégalités métriques violées par la solution du (ILP) relaxé sont recherchées puis ajoutées. Le processus est réitéré jusqu'à ce qu'il n'existe plus d'inégalités métriques violées. La solution optimale du problème relaxé (ILP) est alors optimale pour le problème de dimensionnement sur deux couches. Les détails techniques et les performances sont analysés dans [KL04].

Plusieurs auteurs ont constaté que la plupart des inégalités métriques générées par leurs programmes sont en fait des inégalités de bipartition (elles sont en général des inégalités de multi-partition). Cette constatation empirique peut s'interpréter en supposant que le polytope des coupes et le polytope métrique sont relativement proches, ce qui corrobore plusieurs travaux sur la combinatoire de ces polyèdres (voir par exemple [DFPS01]). Ces résultats expliquent le bon comportement de la procédure de génération multiple de contraintes proposée dans [GKM99]. Nous avons adapté cette procédure à notre problème pour en accélérer la résolution.

Afin d'améliorer encore l'efficacité de la procédure, nous utilisons une heuristique performante décrite dans [KLG03], qui s'appuie sur la structure de pseudo sac-à-dos multidimensionnels à choix multiples apparaissant dans les problèmes relaxés successifs. Cette heuristique fournit de bonnes solutions à ce problème, à partir desquelles sont générées les coupes violées. Les programmes relaxés (ILP) des dernières itérations sont résolus de façon exate afin d'obtenir une solution de valeur optimale.

3 heuristique inspirée des méthodes opérationnelles

L'heuristique *ApproachOM*, déduite des méthodologies opérationnelles, dimensionne le réseau couche par couche des plus hautes (IP) aux plus basses (OTN). L'articulation entre les couches est réduite à ces deux éléments: les liens IP constituent la matrice à router sur l'OTN et l'architecture OTN existante permet d'extrapôler le coût d'un lien IP à partir des routages et du taux de remplissage des liens optiques utilisés. Le fonctionnement de l'heuristique peut être décomposé comme suit:

- Calcul des coûts moyens des flots traversant les liens de la couche OTN à partir des taux de remplissage initiaux constatés.
- A partir de ces coûts moyens, calcul des nouvelles fonctions de coût Φ' appliquées aux liens de la couche IP.
- Résolution optimale du problème de dimensionnement des liens IP avec une matrice de demandes d et une fonction de coût Φ'. Nous obtenons une solution réalisable $\bar{x}$.
- Résolution optimale du problème de dimensionnement pour la couche OTN avec la fonction de coût ψ et la matrice de demande $\tilde{d}$, sachant que $\tilde{d_{ij}} = x_e$ si e=(i,j) existe et $\tilde{d_{ij}} = 0$ sinon. Nous obtenons une solution réalisable $\bar{y}$
- Coût global obtenu: $\Phi(\bar{x}) + \Psi(\bar{y})$.

Les coûts des modules disponibles sur les liens de la couche IP sont modifiés en fonction des taux de remplissage initiaux des liens de la couche OTN. Le taux de remplissage d'un lien est calculé en fonction des quantités de flots traversant ce lien par rapport à la capacité installée. Il nous faut donc calculer les multiflots routés sur le réseau initial. Etant donné des valeurs de capacité fixées, définir un multiflot compatible dans un graphe est un problème de complexité polynomiale. Posons $\tau_{\widetilde{e}}, \forall \widetilde{e} \in \tilde{E}$, le taux de remplissage initial d'un lien $\widetilde{e}$ de la couche OTN. Si nous reprenons l'écriture des fonctions de coûts de la première partie, les nouveaux coûts de la couche IP s'exprimeront: $\Phi'_e(x_e) = \Phi_e(x_e) + x_e \cdot (\sum_{\widetilde{e} \in \Pi(e)} (\frac{\Psi_{\widetilde{e}}}{y_{\widetilde{e}} \cdot \tau_{\widetilde{e}}}))$, $\forall e \in E$, avec $\Pi(e)$ l'ensemble des liens de la deuxième couche appartenant au plus court chemin dans $\tilde{G}$ reliant les deux extrémités de l'arête e.

Le critère de la somme des coûts moyens sur le plus court chemin dans $\tilde{G}$ est choisi ici, car cette stratégie minimise l'usage des ressources à moyen terme dans la dynamique d'évolution d'un réseau.

4 Quelques résultats numériques

Dans Tab.1, Les solutions optimales sont comparées aux solutions fournies par *ApproachOM* pour quatorze instances de réseau à huit noeuds. Les matrices des demandes sont complètes; les valeurs des demandes sont comprises entre 1 et 100. Le graphe support potentiel de la couche IP est complet alors que 40 à 50 % des liens sont disponibles sur la couche optique. Il est possible d'installer des modules de capacité de valeur 16 sur les liens de la couche IP et de valeur 64 sur les liens de la couche OTN. Le coût d'un lien virtuel est calculé en fonction du nombre de modules installés. Sur la couche optique, le coût d'un lien est calculé en fonction du nombre de modules installés et de la longueur du lien.

In: Le numéro de l'instance
% 1c: La proportion initiale du coût des liens de la couche IP par rapport au coût des deux couches.
%Tr: Taux de remplissage moyen initiaux des liens de la couche IP.
T: Temps de résolution en secondes.
It: Nombre d'itérations.
NbC: Nombre de contraintes générées.
CG: Valeur de la fonction objectif, qui est la somme des coûts d'installation des liens de la couche IP et des

liens de la couche optique.
%o/a: Pourcentage d'erreur, en terme de coût, de l'optimisation en deux phases (*ApproachOM*) par rapport à la solution optimale.

In	%1c	%Tr	Opt				ApproachOM				%o/a
			T	It	NbC	CG	T	It	NbC	CG	
1	43.39	91.62	1401	24	109	18626	200	24	79	19461	4.48
2	37.81	81.77	38	8	45	5285	33	11	39	5285	0
3	45	89.43	339	18	92	11257	58	13	60	11707	4
4	47.31	91.16	176	13	85	18304	59	23	62	18777	2.58
5	46.51	93.11	2687	15	98	21337	209	21	85	22145	3.79
6	35.42	86.3	97	9	71	11096	40	11	54	11416	2.88
7	38.84	91.71	268	12	82	14671	211	26	82	15020	2.38
8	28.6	78.96	82	13	69	8429	49	14	44	9263	9.89
9	40.09	90.34	345	15	102	12509	131	17	76	12509	0
10	34.58	85.53	79	10	74	12916	84	16	76	12987	0.55
11	13.19	73.62	32	6	43	1845	22	7	29	1925	4.33
12	17.72	90.05	288	10	75	5242	66	14	63	5452	4
13	18.33	86.86	182	12	83	7984	46	15	55	11460	43.54
14	18.36	92.35	699	15	103	9327	94	15	60	13731	47.22

Tab. 1: Comparaison entre la méthode optimale et *ApproachOM*

5 Conclusion

Des phénomènes intéressants liés à l'aspect multicouche du problème sont déjà observés en comparant la méthode exacte et *ApproachOM* sur ces petits réseaux. Le temps de résolution diminue lorsque le problème est décomposé en deux phases, mais l'erreur commise en moyenne par l'heuristique est de 9.26% du coût global. L'optimum est seulement atteint sur deux instances. La proportion du coût des équipements de la couche IP par rapport au coût sur OTN semble être un facteur influent pour déterminer la qualité de la solution fournie par *ApproachOM*. Lorsque le coût de la couche IP est faible, le coût du dimensionnement en deux phases peut être beaucoup plus élevé que la solution optimale (voir instances 13 et 14). En revanche, nous ne remarquons pas de tendance d'évolution de l'erreur en fonction de la variation du critère du taux de remplissage, pour des taux élevés ($> 70\%$).

Finalement, l'étude menée sur ce problème complexe de dimensionnement semble pertinente. L'aspect multicouche mérite une attention particulière dans ces réseaux, constitués d'équipements différents, qui doivent faire face à des augmentations conséquentes de quantités de traffic dans un avenir proche. La comparaison de ces deux méthodes nous fournit des informations importantes pouvant être exploitées pour améliorer les méthodologies opérationnelles.

References

[DFPS01] A. Deza, K. Fukuda, D. Pasechnik and M. Sato. "On the skeleton of the metric polytope." *Lecture Notes in Computer Science*, 2098 Springer Verlag, Berlin, 125–136.

[DL97] M. Deza and M. Laurent. *Geometry of Cuts and Metrics*. Springer, Algorithms and Combinatorics 15, 1997.

[GKM99] V. Gabrel, A. Knippel and M. Minoux. "Exact solution of multicommodity network optimization problems with general step cost functions." *Operations Research Letters*, 25:15–23, 1999.

[GM95] M. Gondran and M. Minoux. *Graphes et Algorithmes*. Eyrolles, 1995.

[HGMY91] J. Y. Hui, M. B. Gursoy, N. Moayeri and R. D. Yates. "A layered broadband switching architecture with physical and virtual path configurations." *IEEE Journal of Selected Areas in Communications*, 9(9):1416–1426, 1991.

[KL04] A. Knippel and B. Lardeux. ”The Multi-Layered Network Design Problem.” rapport technique France Telecom.

[KLG03] A. Knippel, B. Lardeux and J. Geffard. ”Efficient algorithms for solving the 2-layered network design problem.” Proceedings of INOC *International Network Optimization Conference*, Paris, 2003.