Classes de graphes remarquables pour le problème du routage dans les réseaux tout-optique

Jérôme Palaysi

LIRMM, 161, rue Ada, 34 392 Montpellier Cedex 5, France

Nous nous intéressons aux rapports existant entre le problème du routage dans des réseaux tout-optique WDM dont les routeurs sont capables de convertir les fréquences des communications à la volée (sans conversion opto-électronique) et le problème du routage dans des réseaux tout-optique dont les routeurs ne sont pas munis de tels convertisseurs. Les problèmes algorithmiques associés sont connus sous les noms respectifs de «Minimisation de Charge» et «Routage Tout-Optique». Des méthodes proposées pour résoudre le problème du Routage Tout-Optique commencent par faire l'hypothèse que tous les routeurs sont des routeurs avec convertisseurs et cherchent donc un routage minimisant la charge. Dans un deuxième temps, ces heuristiques affectent les fréquences à chacune des routes. En dehors des cycles de longueur strictement supérieure à 4, nous caractérisons les topologies de réseaux dans lesquelles cette stratégie peut donner des solutions optimales.

Keywords: réseaux, WDM, tout-optique, routage, minimisation de charge, minimisation du nombre de fréquences

1 Introduction

Dans les réseaux traditionnels de type «store and forward», les messages sont convertis sous une forme électronique dans les routeurs afin de permettre leur stockage et leur traitement. Dans les réseaux **tout-optique** [BJCG$^+$97], la technologie mise en œuvre doit permettre aux données de conserver leur forme optique d'un bout à l'autre des communications, évitant ainsi des ralentissements dûs aux conversions. Tout comme dans les réseaux à commutation de circuits, une communication est établie par la donnée d'une route physique dans le réseau. Pour ces réseaux, beaucoup d'auteurs envisagent que plusieurs communications puissent utiliser simultanément une même fibre optique pour peu que leurs fréquences soient toutes distinctes. Cette technique est connue sous le nom de WDM pour *Wavelength Division Multiplexing* [Tan99, page 117]. Le nombre de fréquences disponibles est une ressource critique : un algorithme établissant les communications dans les réseaux tout-optique doit donc chercher à minimiser le nombre de longueurs d'onde employées.

Dans cet article, nous nous intéressons aux graphes non orientés comme modèle pour les réseaux tout-optique. Étant donné un graphe G, nous utiliserons la notation $V(G)$ pour désigner l'ensemble des sommets de G et $E(G)$ pour désigner l'ensemble de ses arêtes. D'autre part, nous noterons $\chi(G)$ le nombre chromatique du graphe G. Nous appelons **instance de communication** un triplet $(G,\mathcal{R},com)$ où G est un graphe, $\mathcal{R}$ un ensemble appelé ensemble de **requêtes** et com une fonction[†] de $\mathcal{R}$ dans $[V(G)]^2 = \{\{a,b\}|a,b \in V(G)\}$. Étant donnée une instance de communication $(G,\mathcal{R},com)$, nous appelons **routage** une fonction qui associe, à toute requête $r \in \mathcal{R}$ une chaîne dans G dont les extrémités correspondent avec $com(r)$. Étant donné un routage sur un graphe, la charge d'une arête a du graphe est égale au nombre de chaînes utilisant cette arête. La **charge du routage** chn est égale à la charge maximale parmi les charges de toutes les arêtes du graphe et nous la noterons $\pi(chn)$.

[†] La fonction com associe à chaque requête de $\mathcal{R}$ le couple de sommets (appelés **sommets communicants**) entre lesquels une communication est demandée.

Le ROUTAGE TOUT-OPTIQUE a pour donnée une instance de communication $I = (G, \mathcal{R}, com)$. Le résultat attendu est un routage *chn* et une fonction de coloration[‡] *col* de $\mathcal{R}$ dans $\{1, 2, ..., k\}$. Deux chaînes du routage qui partagent au moins une même arête du graphe sont dites en **conflit** et les requêtes auxquelles elles sont assignées **ne doivent pas avoir la même couleur**. Enfin le but est de minimiser k (la plus petite valeur possible de k est notée $w(I)$). Notons que le nombre minimum de fréquences nécessaires pour le routage *chn* est égal au nombre chromatique du graphe des conflits[§].

La MINIMISATION DE CHARGE a également pour donnée une instance de communication $I = (G, \mathcal{R}, com)$. Le résultat attendu est un routage *chn*. Le but est de minimiser $\pi(chn)$ (la plus petite valeur possible de $\pi(chn)$ est notée $\pi(I)$)

Notons que chacun de ces deux problèmes est connu pour être $\mathcal{NP}$-complet en général [GJ85, KL84]. Les résultats exposés dans cet article permettent de comparer, sous certains aspects, ces deux problèmes fondamentaux dans le domaine des réseaux tout-optique.

Dans la section 2, nous nous intéressons à la famille des graphes G pour lesquels quelle que soit l'instance de communication I avec $G \in I$ nous sommes sûr de l'existence d'un routage *chn* minimisant à la fois la charge et le Nombre de Couleurs Nécessaires (expression que nous résumons parfois avec les trois lettres *«NCN»* par commodité). Un graphe G appartient à cette famille si et seulement si pour toute instance de communication $I = (G, \mathcal{R}, com)$ il existe un routage *chn* tel que $\pi(chn) = \pi(I)$ et $\chi\big(cnflt(chn)\big) = w(I)$. Nous appelons cette propriété **la propriété «bi-critère»**. En dehors des cycles de longueur strictement supérieure à 4, nous caractérisons cette famille.

Dans la troisième section, nous nous intéressons aux graphes G pour lesquels quelle que soit l'instance de communication I avec $G \in I$ nous avons $w(I) = \pi(I)$ (cette famille de graphes est manifestement incluse dans la précédente). Nous montrons que cette famille contient exclusivement les chaînes de toutes longueurs et les cycles de longueur 3 et 4.

Un des buts du placement de convertisseurs en longueurs d'onde peut être d'obtenir un réseau dans lequel tout routage *chn* nécessite exactement $\pi(chn)$ couleurs. Nous expliquons comment placer (polynomialement) un nombre minimum de convertisseurs de longueurs d'onde dans des modèles non orientés de réseaux tout-optique (notons que le placement d'un nombre minimum de convertisseurs dans des modèles orientés et symétriques de réseaux tout-optique planaires est un problème $\mathcal{NP}$-difficile [WW98]).

Des versions détaillées des preuves de cet article peuvent être consultées dans [Pal02].

2 Les Graphes «bi-critères»

Pour une instance de communication donnée, nous appelons routage «bi-optimal» un routage qui minimise à la fois la charge et le *NCN*. Les graphes «bi-critères» admettent toujours un routage «bi-optimal» quel que soit l'ensemble de requêtes à satisfaire.

Dans cette section, à part les cycles de longueur supérieure à 4, nous caractérisons la famille des graphes pour lesquels il existe toujours un routage «bi-optimal». Nous allons montrer, par l'intermédiaire du lemme suivant, que les seuls graphes qui ne sont pas des arbres[¶] mais qui appartiennent à cette famille sont forcément des cycles. Le lemme 2 montrera que les petits cycles appartiennent à cette famille.

Lemme 1 *Soit G un graphe pour lequel, quelle que soit l'instance de communication $(G, \mathcal{R}, com)$ il existe toujours un routage qui minimise à la fois la charge et le nombre de couleurs nécessaires.*
Si $\Delta(G) \geq 3$ alors G est un arbre ($\Delta(G)$ est le degré maximum du graphe).

Idée de la preuve 1 *Soit G un graphe connexe qui n'est pas un arbre et tel que $\Delta(G) \geq 3$. Il existe donc dans G un sommet v de degré au moins trois et qui appartient à un cycle. Notons x, y et z trois des voisins de ce sommet. L'idée de la preuve consiste à poser 2 requêtes entre x et y, 2 requêtes entre y et z, 2 requêtes*

‡ Cette fonction est aussi appelée «fonction d'affectation de fréquences»

§ Le **graphe des conflits** d'un routage *chn*, noté $cnflt(chn)$, a pour sommets l'ensemble des requêtes satisfaites par ce routage ; deux requêtes sont adjacentes dans le graphe des conflits si et seulement si leur chaîne assignée par la fonction de routage sont elles-mêmes en conflit.

¶ Dans les arbres, un seul routage est possible : il est donc optimal du point de vue de la charge et du *NCN*. Les arbres sont donc, évidemment, des graphes «bi-critères».

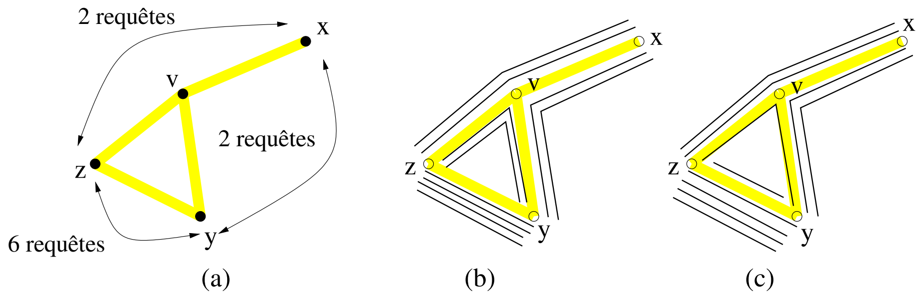


FIG. 1: (a) Une instance de communication (b) L'unique routage de charge minimale pour cette instance (il nécessite au moins 6 couleurs) (c) Un routage de charge 5 nécessitant seulement 5 couleurs.

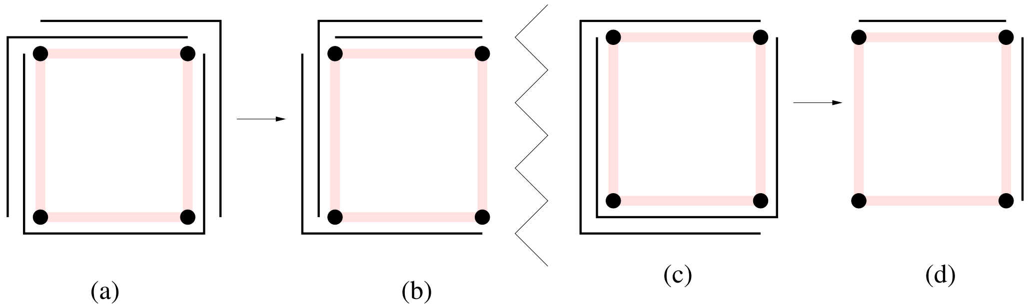


FIG. 2: D'un côté (a) et (b) montrent une opération de «réduction» sur 2 chaînes de longueur 2 et une chaîne de longueur 3. D'un autre côté (c) et (d) montrent une opération de «réduction» sur 2 chaînes de longueur 3.

entre z et x et enfin 4 requêtes supplémentaires entre toute paire de sommets adjacents dans le graphe (sauf si un sommet de cette paire est v). Par exemple, la figure 1 (a) montre un tel graphe (qui est le plus petit possible). Sur cette même figure nous considérons l'ensemble de requêtes matérialisé par les arcs fléchés. Sur la figure 1 (b) nous avons représenté le seul routage de charge minimale 4 : il nécessite 6 couleurs alors que le routage de la figure 1 (c), de charge 5, en nécessite seulement 5.

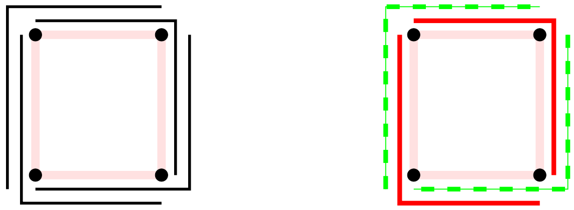
Lemme 2 *Si G est un cycle de longueur inférieure ou égale à 4 alors, quelle que soit l'instance de communication $(G, \mathcal{R}, com)$, il existe toujours un routage qui minimise à la fois la charge et le NCN.*

Idée de la preuve 2 *(seulement pour le cas le plus compliqué : celui des cycles de longueur 4) Supposons que C soit un cycle de longueur 4 et considérons un routage de charge minimale sur ce cycle. On peut appliquer les transformations décrites dans la figure 2. Chacune de ces transformations laisse invariante la charge du routage (la charge sur une arête donnée pouvant, elle, diminuer). Lorsqu'aucune de ces transformations n'est plus applicable on peut montrer que $\pi(chn)$ couleurs sont suffisantes en colorant d'abord avec 2 couleurs tout les quadruplets de chaînes possédant la configuration de la figure 3 (a) (cette coloration est optimale). Enfin les chaînes restantes ont un graphe des conflits qui est un graphe d'intervalles.*

Théorème 1 *Pour l'ensemble des graphes qui ne sont pas des cycles de longueur supérieure ou égale à 5, les 2 propositions suivantes sont équivalentes :*
- *Quelle que soit l'instance de communication $I = (G, \mathcal{R}, com)$ il existe un routage chn tel que $\pi(chn) = \pi(I)$ et $\chi\big(cnflt(chn)\big) = w(I)$.*
- *G est un arbre ou un cycle de longueur inférieure ou égale à 4.*

Preuve 1 *Il s'agit d'une conséquence directe des lemmes 1 et 2.*

Question *Quels sont les cycles C de longueur supérieure à 4 pour lesquels quel que soit $I = (C, \mathcal{R}, com)$ il existe toujours un routage chn minimisant à la fois la charge et le nombre de couleurs nécessaire (c'est à dire tel que $\chi\big(cnflt(chn)\big) = w(I)$) ?*



(a) (b)

FIG. 3: (a) 4 chaînes de longueurs 2 couvrant uniformément un réseau «carré» (b) Coloration optimale de ces chaînes avec 2 couleurs.

3 Graphes pour lesquels la charge minimale est égale au NCN quelle que soit l'instance de communication

Nous nous intéressons maintenant aux graphes G pour lesquels quelle que soit l'instance de communication $I = (G, \mathcal{R}, com)$ on a $\pi(I) = w(I)$. Un résultat existe déjà dans le cas de graphes orientés et symétriques : soit $\mathcal{T}$ un arbre orienté et symétrique, Bruno Beauquier a montré que $\mathcal{T}$ était une subdivision d'étoile si et seulement si pour toute instance $I = (\mathcal{T}, \mathcal{R}, com)$ on avait $\pi(I) = w(I)$ [Bea00, théorème 3.2.1]. Dans le cadre de graphes non orientés, nous pouvons énoncer une version de ce théorème sans se restreindre aux arbres.

Théorème 2 *Soit $\mathcal{C}$ un graphe non orienté. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *pour toute instance $I = (\mathcal{C}, \mathcal{R}, com)$, $\pi(I) = w(I)$;*
2. *$\mathcal{C}$ est une chaîne ou un cycle de longueur inférieure ou égale à 4.*

Preuve 2 *D'après le théorème 1, G ne peut être qu'un arbre ou un cycle. Si c'est un arbre, c'est précisément une chaîne sinon il existe des ensembles de requêtes nécessitant plus de couleurs que la charge induite par le seul routage possible (des exemples peuvent être aisément exhibés). Si c'est un cycle de longueur supérieure ou égale à 5 nous distinguons 2 cas selon que la longueur est paire ou impaire :*

– *Soit C un cycle de longueur $2p+1$. Considérons une numérotation des sommets, avec les entiers $\{0, 1, \ldots, 2p\}$, obtenue en tournant autour de ce cycle. Soit l'ensemble de requêtes $r_0, r_1, \ldots r_{2p}$ où $com(r_i) = \{i, i+2 \mod 2p+1\}$ quel que soit $i \in [0, 2p]$ et chn un routage aux plus courtes chaînes satisfaisant ces requêtes. Il est clair que ce routage est de charge uniforme 2 (donc $\pi(I) = 2$) et que $cnflt(chn)$ est un cycle impair (donc $\chi\big(cnflt(chn)\big) = 3$). De plus, tout autre routage aurait une charge d'au moins 3, ce qui implique que $w(I) = 3$.*
– *Soit C un cycle de longueur $2p$. Considérons une numérotation des sommets avec les entiers $\{0, 1, \ldots, 2p-1\}$. Soit l'ensemble de requêtes $r_0, r_1, \ldots r_{2p-1}$ tel que $com(r_0) = \{0, 3\}$, $com(r_{2p-1}) = \{2p-1, 2\}$ et $com(r_i) = \{i, i+2 \mod 2p\}$ quel que soit $i \in [2, 2p-2]$ et chn un routage aux plus courtes chaînes satisfaisant ces requêtes[‖]. Il est clair que ce routage est de charge uniforme 2 (donc $\pi(I) = 2$) et que $cnflt(chn)$ est un cycle impair (donc $\chi\big(cnflt(chn)\big) = 3$). Comme tout autre routage aurait une charge plus importante, $w(I) = 3$.*

4 Placement de convertisseurs

Nous nous intéressons maintenant au placement de convertisseurs dans un réseau modélisé par un graphe non orienté. Dans un réseau complètement équipé en convertisseurs de longueur d'onde tout-optique, le ROUTAGE TOUT-OPTIQUE est strictement équivalent à la MINIMISATION DE CHARGE : tout routage *chn* est colorable avec $\pi(chn)$ couleurs et il existe un algorithme polynomial de coloration. Les convertisseurs tout-optique impliquant un coût supplémentaire, une question légitime consiste à placer un nombre minimal

[‖] Dans le cas particulier où le graphe du réseau est un cycle de longueur 6, les requêtes r_0 et r_1 peuvent être satisfaites par 2 chaînes chacune. Mais il est facile de vérifier qu'un seul choix mène à un routage de charge minimale.

de convertisseurs de sorte que le problème d'affectation de fréquences devienne polynomial et que tout routage *chn* soit colorable avec $\pi(chn)$ couleurs.

Théorème 3 *Dans un modèle de réseaux tout-optique non orientés et connexes, le nombre minimal de convertisseurs en longueur d'onde pour avoir* $\chi\big(cnflt(chn)\big) = \pi(chn)$ *quel que soit le routage chn, est égal :*

- *à 1 si le graphe du réseau est un anneau ;*
- *au nombre de sommets de degré supérieur ou égal à 3 sinon.*

Preuve 3 *En effet,* **si le graphe est un anneau***, un routage constitué de 3 chaînes induisant une charge égale à 2 et dont le graphe des conflits est un «triangle» montre qu'un convertisseur, au moins, est nécessaire. D'un autre côté, grâce à l'insertion d'un convertisseur, le problème devient équivalent à celui de la coloration de chaînes dans un réseau linéaire.* **Autrement***, le graphe est soit celui d'un réseau linéaire et pour n'importe quel routage le NCN est égal à la charge soit il possède des sommets de degré au moins 3 et d'après le théorème 2 il existe des routages nécessitant un nombre de couleurs supérieur à leur propre charge.*

Remarques *D'abord, dans un réseau tel que* $\chi\big(cnflt(chn)\big) = \pi(chn)$ *quel que soit le routage chn, le problème d'affectation de fréquences est donc polynomial d'après le théorème précédent. Ensuite la* MINIMISATION DE CHARGE *étant polynomiale [FNS+92] dans les anneaux, il est facile de voir que pratiquement les réseaux à 3 ou 4 routeurs ne nécessitent pas de convertisseurs (cf. preuve constructive du lemme 2).*

5 Perspective

Une question demeure en suspens pour la classe des graphes dont on est sûr qu'il existe toujours un routage minimisant à la fois la charge et le *NCN*. Nous ne savons pas si cette propriété est conservée par des cycles de longueur supérieure à 4. Une façon de répondre à cette question est de chercher, s'il en existe, des instances de communication I pour des cycles de taille 5, ou plus, qui ne vérifient pas la propriété «bicritère». Notons que nous devons alors avoir $\pi(I) \geq 3$. En effet, il est connu que dans les cycles tout routage de charge L peut être coloré avec au plus $2L-1$ couleurs[**]. Si $\pi(I) \leq 2$ alors 3 couleurs, au pire, sont suffisantes. D'un autre côté, n'importe quel autre routage qui n'est pas de charge minimale sera au moins de charge 3 et nécessitera donc au moins 3 couleurs.

Références

[Bea00] Bruno Beauquier. *Communications dans les réseaux optiques par multiplexage en longueur d'onde*. PhD thesis, Université de Nice - Sophia Antipolis, jan 2000.

[BJCG+97] B. Beauquier, Bermond J.-C., L. Gargano, P. Hell, S. Pérennes, and U. Vaccaro. Graph problems arising from wavelength-routing in all-optical networks. In *Proceedings of the 2nd Workshop on Optics and Computer Science*, apr 1997.

[FNS+92] András Frank, Takao Nishizeki, Nobuji Saito, Hitoshi Suzuki, and Éva Tardos. Algorithms for routing around a rectangle. *Discrete Applied Mathematics*, 40(3) :363–378, 1992.

[GJ85] M. C. Golumbic and R. E. Jamison. The edge intersection graphs of paths in a tree. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 38 :8–22, 1985.

[KL84] M. R. Kramer and J. Leeuwen. The complexity of wire-routing and finding minimum area layouts for arbitrary vlsi circuits. *Advances in Computing Research*, 2 :129–146, 1984.

[Pal02] Jérôme Palaysi. *Problèmes Algorithmiques dans les Réseaux Tout-Optique*. PhD thesis, Université Montpellier II, 2002.

[Tan99] Andrew Tanenbaum. *Réseaux*. Dunod, 1999.

[WW98] Gordon Wilfong and Peter Winkler. Ring routing and wavelength translation. In *Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, volume 9, pages 333–341. ACM-SIAM, 1998.

[**] (Indice) Soit $(C, \mathcal{R}, com)$ une instance de communication sur un cycle, *chn* un routage, r une requête de $\mathcal{R}$ et a une des deux arêtes extrémités de $chn(r)$. Il suffit de remarquer que $L-1$ couleurs suffisent pour toutes les requêtes, sauf r, dont les chaînes utilisent a.