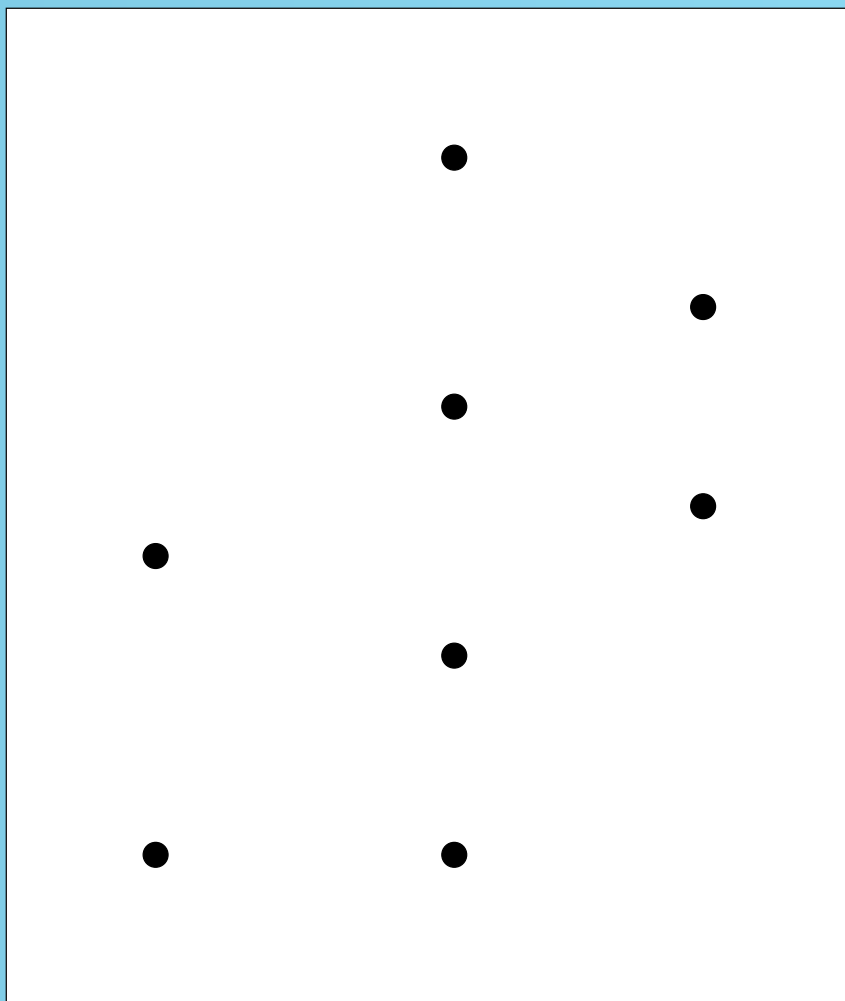




Assignment de fréquences et étiquetage $(d, 1)$ -total dans les topologies planaires

F. Bazzaro, M. Montassier

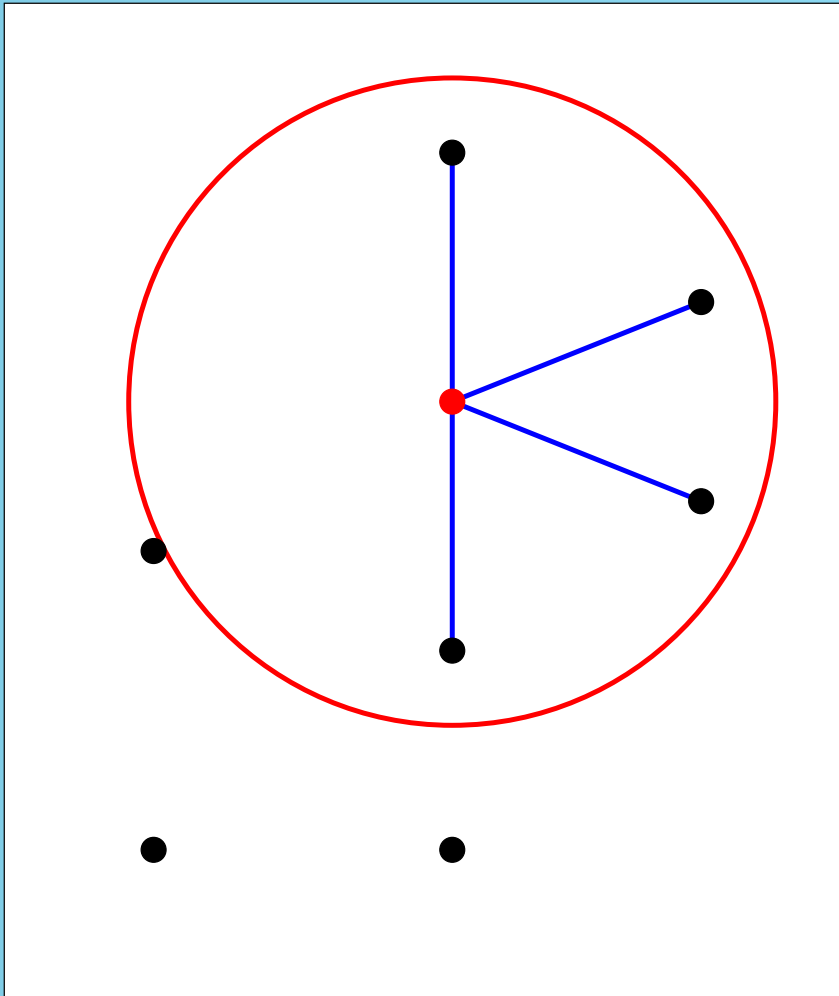
$L(2, 1)$ étiquetage



Données :
un ensemble d'émetteurs.

Objectif :
Tous doivent émettre sur
une fréquence tout en
limitant la plage de
fréquences utilisée.

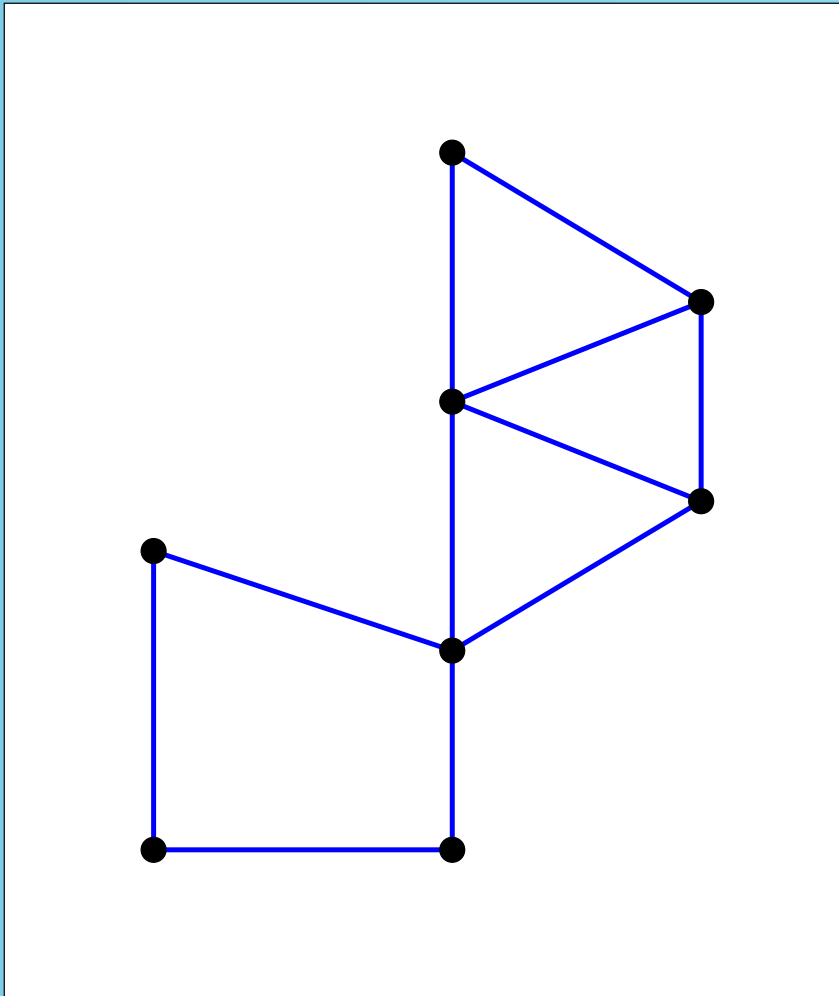
$L(2, 1)$ étiquetage



Contrainte 1 :

Deux émetteurs proches doivent émettre sur des fréquences suffisamment éloignées.

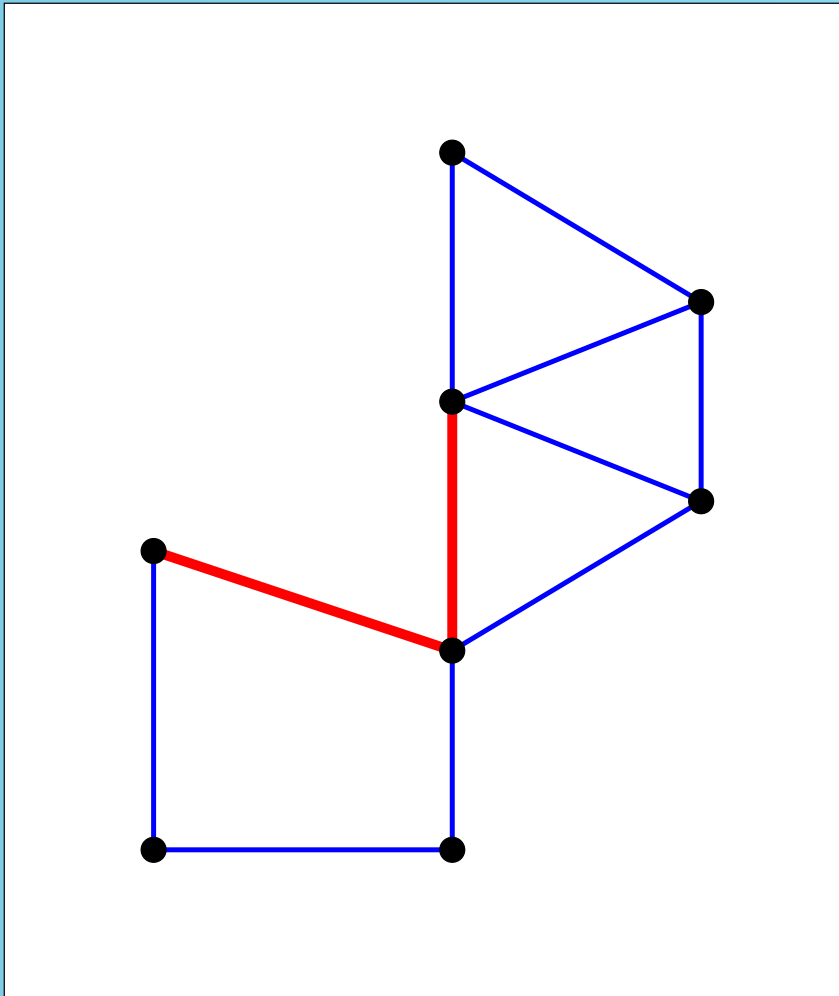
$L(2, 1)$ étiquetage



Contrainte 1 :

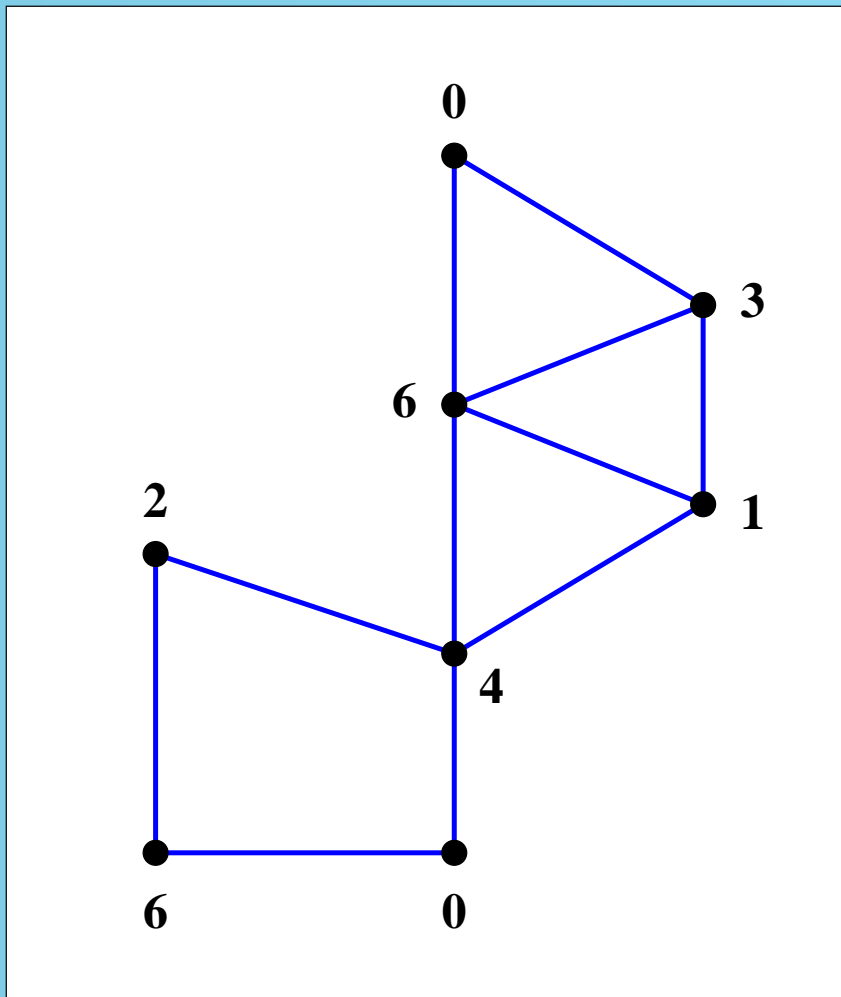
Deux émetteurs proches
doivent émettre sur des
fréquences suffisamment
éloignées.

$L(2, 1)$ étiquetage



Contrainte 2 :
Deux émetteurs à distance 2 doivent émettre sur des fréquences différentes.

$L(2, 1)$ étiquetage



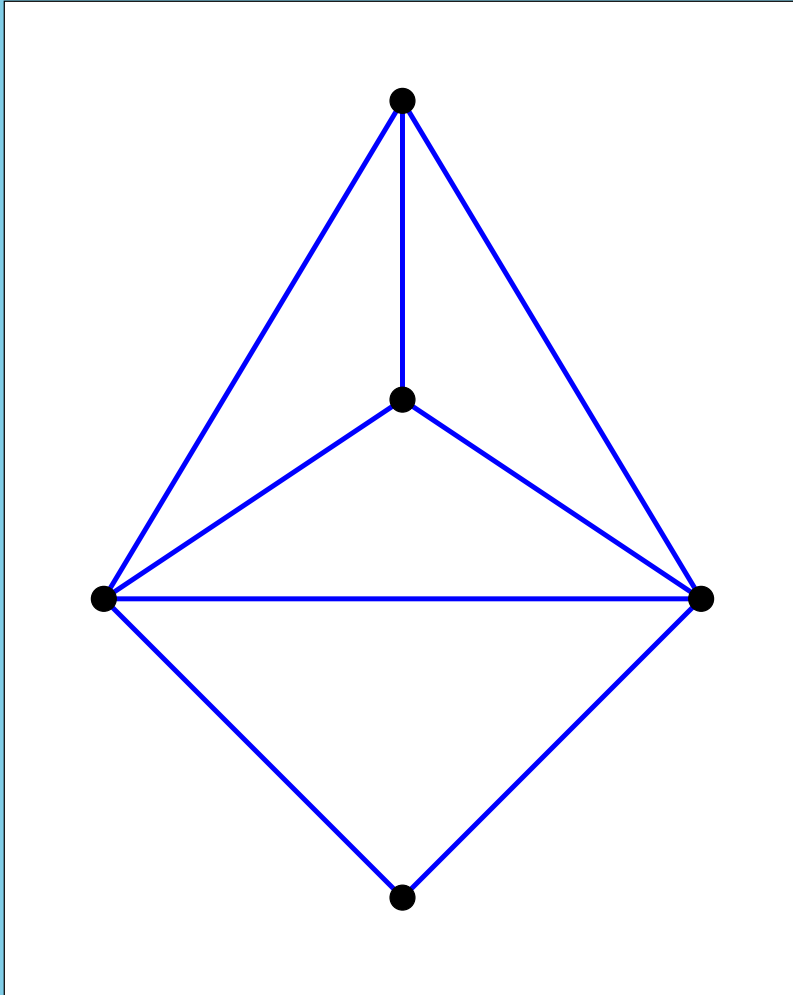
Résultat :

Une assignation de fréquence correcte ou $L(2, 1)$ -étiquetage.

Notation :

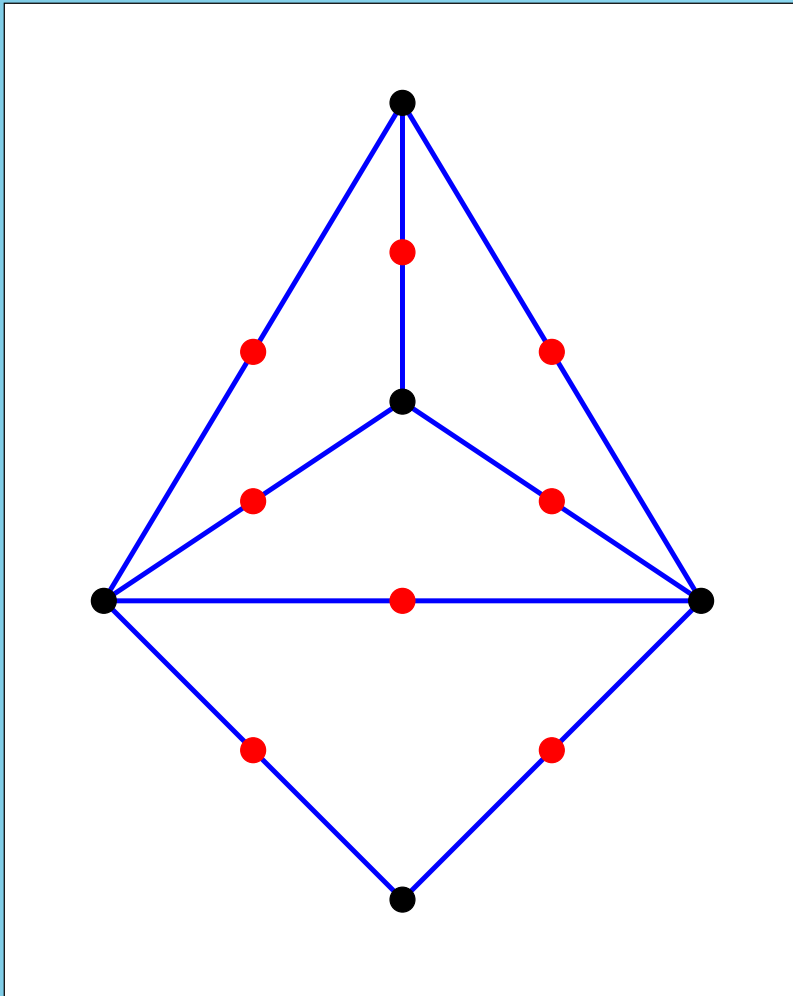
$\lambda_{2,1}(G)$ est la taille du plus petit intervalle d'entiers permettant un $L(2, 1)$ -étiquetage correct du graphe G .

Etiquetage $(d, 1)$ -total



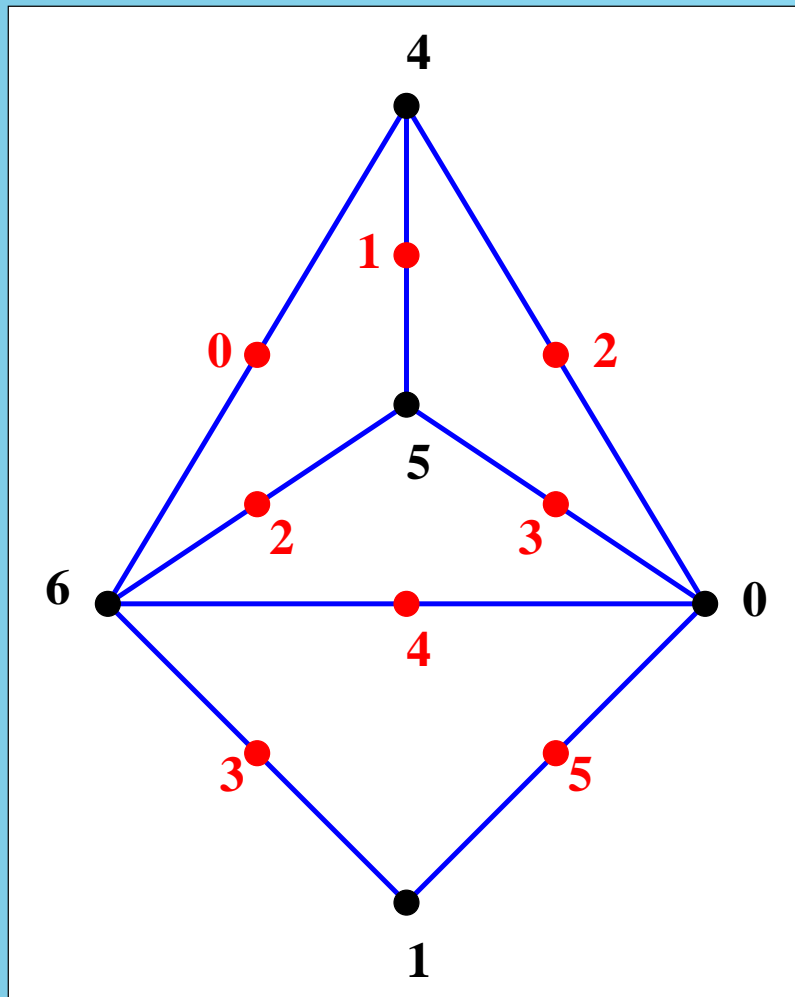
Etiquetage $(2, 1)$ -total
d'un graphe G .

Etiquetage $(d, 1)$ -total



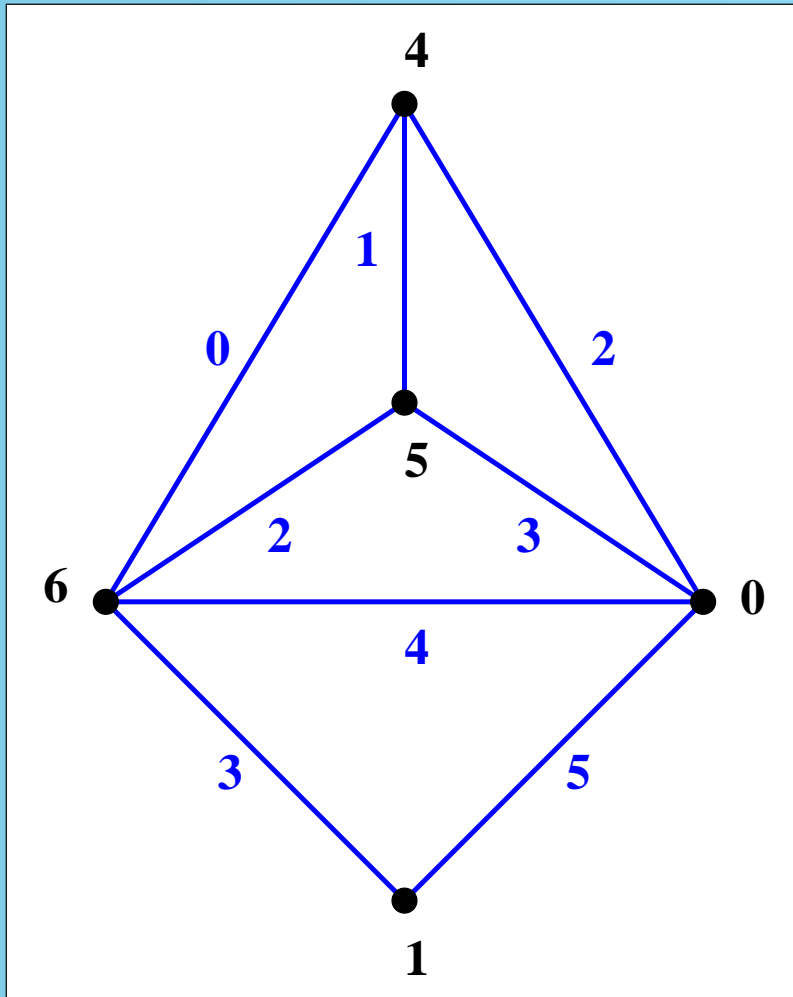
G' est la subdivision de G
ou graphe d'incidence de
 G

Étiquetage $(d, 1)$ -total



$L(2, 1)$ -étiquetage de G'

Etiquetage $(d, 1)$ -total



Etiquetage $(2, 1)$ -total de G

Étiquetage $(d, 1)$ -total

L'étiquetage $(d, 1)$ -total d'un graphe $G = (V, E)$ est une application $c : V \cup E \rightarrow \mathbb{N}$ vérifiant :

- (i) $\forall (u, v) \in V^2 : uv \in E \Rightarrow c(u) \neq c(v)$
- (ii) $\forall (u, v, w) \in V^3 : uv \in E, uw \in E \Rightarrow c(uv) \neq c(uw)$
- (iii) $\forall (u, v) \in V^2 : uv \in E \Rightarrow |c(u) - c(uv)| \geq d$

On note le nombre $(d, 1)$ -total (la taille du plus petit intervalle d'entiers permettant d'avoir un $(d, 1)$ -étiquetage total de G) : $\lambda_d^T(G)$

Notations

Pour un graphe $G = (V, E)$, on note :

- la maille : g
- le degré maximum de G : Δ
- le degré d'un sommet v de G : $d(v)$
- un sommet de degré k : un k -sommet
- le nombre chromatique : $\chi(G)$
- l'indice chromatique : $\chi'(G)$

Premières majorations

Observation. Soit G un graphe, $\lambda_d^T(G) \leq \lambda_{d,1}(G')$ où G' est le graphe d'incidence de G .

Premières majorations

Observation. Soit G un graphe, $\lambda_d^T(G) \leq \lambda_{d,1}(G')$ où G' est le graphe d'incidence de G .

Lemme. Soit G un graphe planaire, alors

$$(i) \quad \lambda_2^T(G) \leq \lambda_{2,1}(G') \leq 2\Delta + 25 \text{ [HG99]}$$

$$(ii) \quad \lambda_2^T(G) \leq \lambda_{2,1}(G') \leq \frac{5}{3}\Delta + 90 \text{ [MS01]}$$

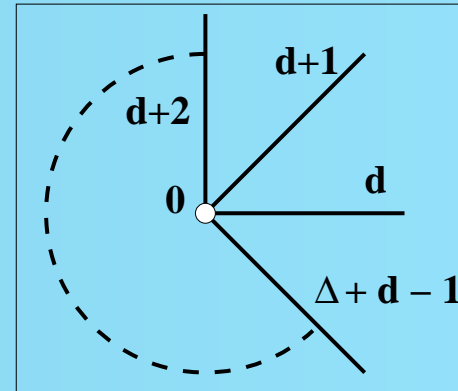
[HG99] J. Van Den Heuvel and S. McGuinness. Colouring the square of a planar graphs. Technical report, Centre for Discrete and Applicable Mathematics, 1999. Report LSE-CDAM-99-06.

[MS01] M. Molloy and M.R. Salavatipour. Frequency channel assignment on planar networks. Proc. of 10th Annual Symposium on Algorithms (ESA 2002), LNCS 2461, pp. 736-747.

Minorations

Proposition.[Hav03] Soit G un graphe de degré maximum Δ , alors

- (i) $\lambda_d^T(G) \geq \Delta + d - 1$;
- (ii) si G est Δ -régulier, $\lambda_d^T(G) \geq \Delta + d$;
- (iii) si $d \geq \Delta$, $\lambda_d^T(G) \geq \Delta + d$.



[Hav03] F. Havet. Workshop Graphs and Algorithms, Dijon (FRANCE), 2003.

Majorations

Proposition. [Hav03] Soit G un graphe, alors :

$$(i) \lambda_d^T(G) \leq \chi(G) + \chi'(G) + d - 2;$$

$$(ii) \lambda_d^T(G) \leq 2\Delta + d - 1.$$

[Hav03] F. Havet. Workshop Graphs and Algorithms, Dijon (FRANCE), 2003.

Majorations

Pour un graphe biparti, $\chi'(G) = \Delta$ [Kön16] :

Corollaire. *[Graphes bipartis] Soit G un graphe biparti, alors :*

$$\lambda_d^T(G) \leq \Delta + d$$

[Kön16] D. König. Über graphen und ihre anwendung auf determinantheorie und megenlehre. *Math. Ann.*,
77 :453-465, 1916.

Majorations

En utilisant le théorème des quatre couleurs, on obtient pour les graphes planaires :

Corollaire. *[Graphes planaires] Soit G un graphe planaire simple, alors :*

$$\lambda_d^T(G) \leq \Delta + d + 3$$

Majorations

Pour un graphe planaire extérieur différent d'un cycle impair, $\chi'(G) = \Delta$ et $\chi(G) = 3$.

Corollaire. *[Graphes planaires extérieurs] Soit G un graphe planaire extérieur, alors*

$$\lambda_d^T(G) \leq \Delta + d + 1$$

Majorations

Pour un graphe s -dégénéré, $\chi(G) = s + 1$.

Corollaire. *[Graphes s -dégénérés] Soit G un graphe s -dégénéré, alors*

$$\lambda_d^T(G) \leq \Delta + d + s$$

Conjectures

Conjecture.[HY02] Soit G un graphe, alors
$$\lambda_d^T(G) \leq \min\{\Delta + 2d - 1, 2\Delta + d - 1\}.$$

Conjecture.[HY02] Soit G un graphe avec $\Delta \leq 3$, $G \neq K_4$, alors
$$\lambda_2^T(G) \leq 5.$$

[HY02] F. Havet. and M.-L. Yu. $(d, 1)$ -total labelling of graphs. Technical report 4650, INRIA, 2002.

Théorème

Théorème. Soit G un graphe planaire de degré maximum Δ et de maille g . Alors $\lambda_d^T(G) \leq \Delta + 2d - 2$ dans les cas suivants :

- (i) $d \geq 2$, $\Delta \geq 2d + 1$ et $g \geq 11$;
- (ii) $\Delta \geq 2d + 2$ et $g \geq 6$;
- (iii) $\Delta \geq 2d + 3$ et $g \geq 5$;
- (iv) $d \geq 2$, $\Delta \geq 8d + 2$.

Cheminement de la preuve

On prouve le Théorème par contradiction :

- On suppose qu'il existe un contre-exemple minimal $H = (V, E)$ de degré maximal $\Delta \geq \alpha$ de maille g ayant le nombre minimum de sommets n et d'arêtes m .

Cheminement de la preuve

On prouve le Théorème par contradiction :

- On suppose qu'il existe un contre-exemple minimal $H = (V, E)$ de degré maximal $\Delta \geq \alpha$ de maille g ayant le nombre minimum de sommets n et d'arêtes m .
- On élimine des configurations ne pouvant appartenir à H .

Cheminement de la preuve

On prouve le Théorème par contradiction :

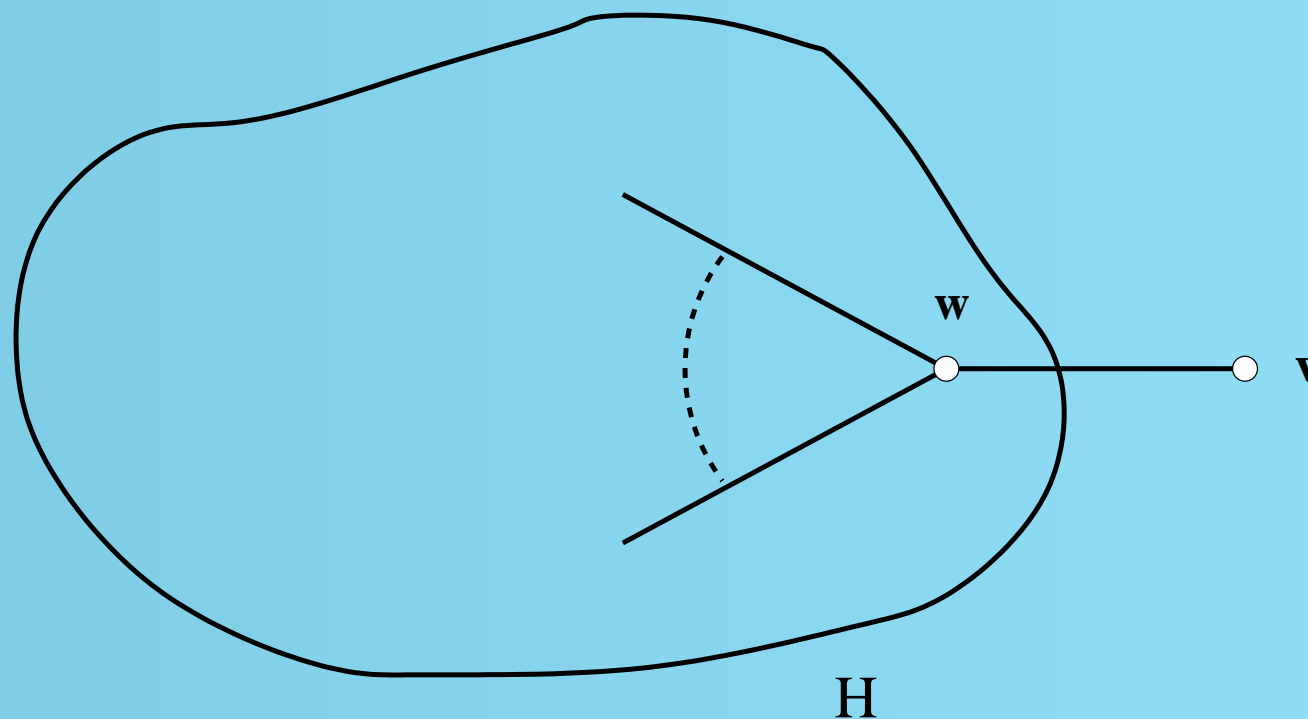
- On suppose qu'il existe un contre-exemple minimal $H = (V, E)$ de degré maximal $\Delta \geq \alpha$ de maille g ayant le nombre minimum de sommets n et d'arêtes m .
- On élimine des configurations ne pouvant appartenir à H .
- On obtient ensuite une contradiction avec la formule d'Euler lorsque ces configurations sont interdites.

Position des pendants dans H

- Si $\Delta \geq \alpha + 1$, H n'a pas de pendant.
- Si $\Delta = \alpha$, H n'a pas de pendant v tel que $\Delta(H \setminus \{v\}) = \Delta(H)$

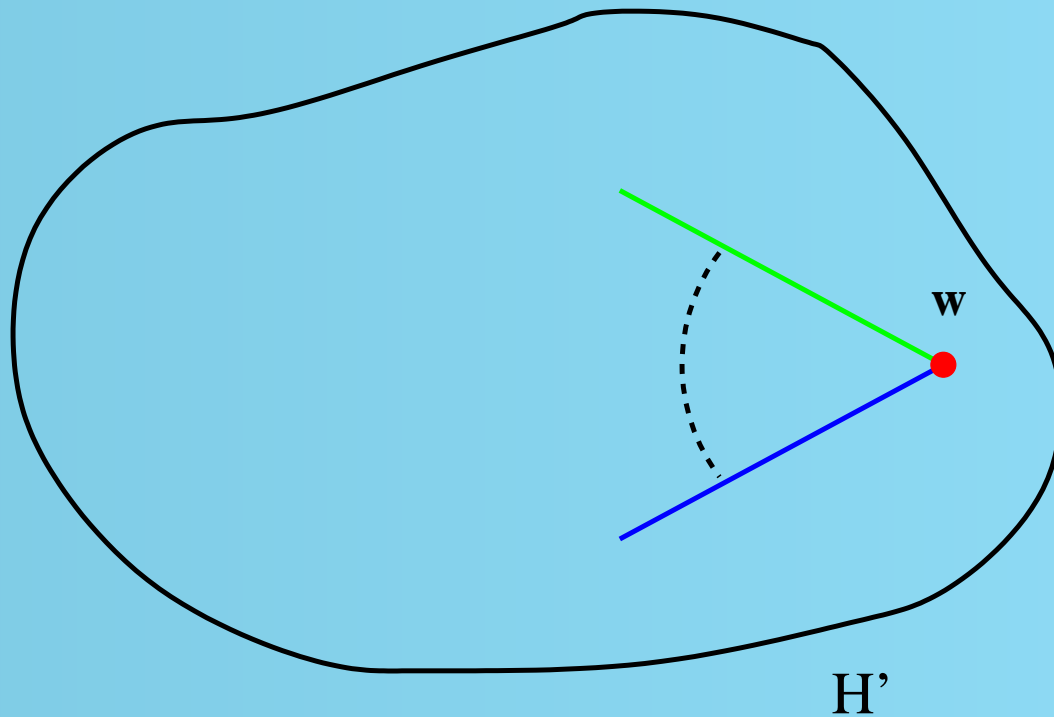
Position des pendants dans H

- Si $\Delta \geq \alpha + 1$, H n'a pas de pendant.
- Si $\Delta = \alpha$, H n'a pas de pendant v tel que $\Delta(H \setminus \{v\}) = \Delta(H)$



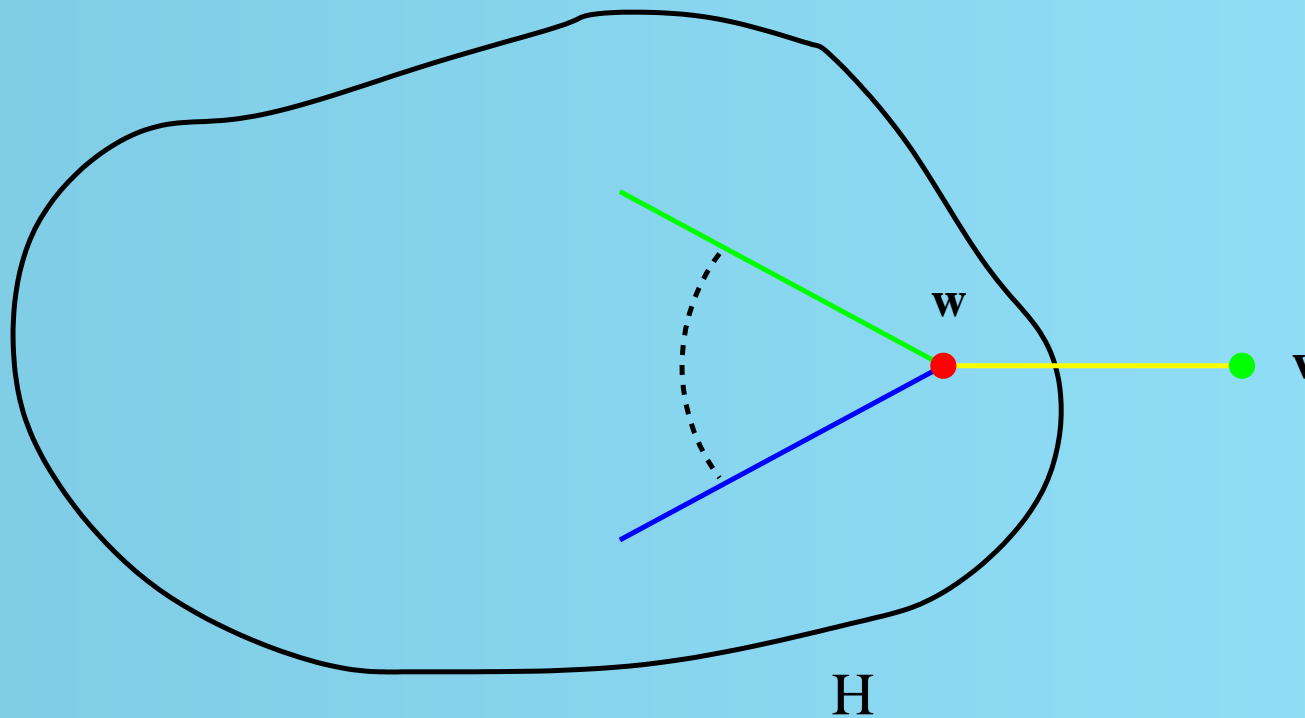
Position des pendants dans H

- Si $\Delta \geq \alpha + 1$, H n'a pas de pendant.
- Si $\Delta = \alpha$, H n'a pas de pendant v tel que $\Delta(H \setminus \{v\}) = \Delta(H)$



Position des pendants dans H

- Si $\Delta \geq \alpha + 1$, H n'a pas de pendant.
- Si $\Delta = \alpha$, H n'a pas de pendant v tel que $\Delta(H \setminus \{v\}) = \Delta(H)$

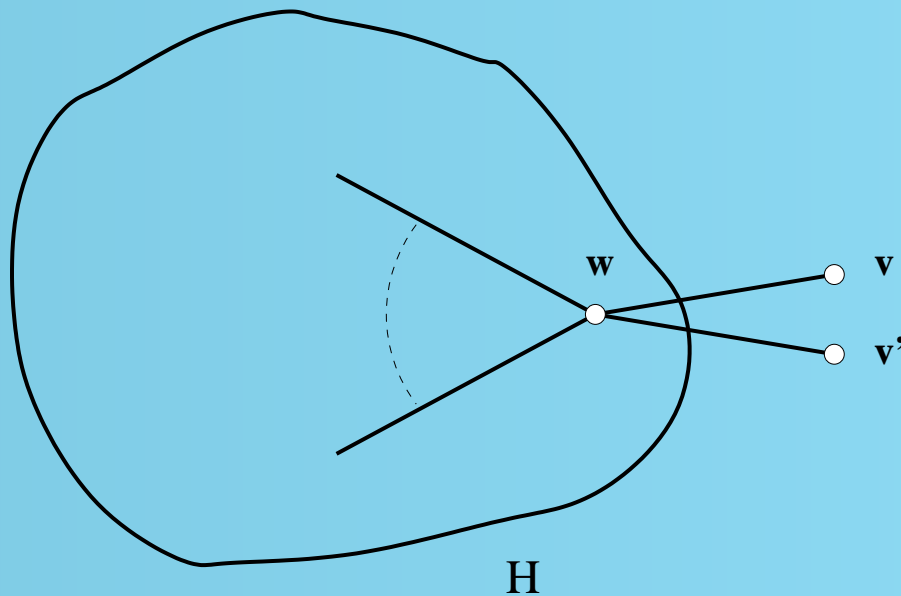


Position des pendants dans H

- Si $\Delta = \alpha$ alors H a au plus un pendent, si $g \geq 4$ ou $\alpha \geq 8$.

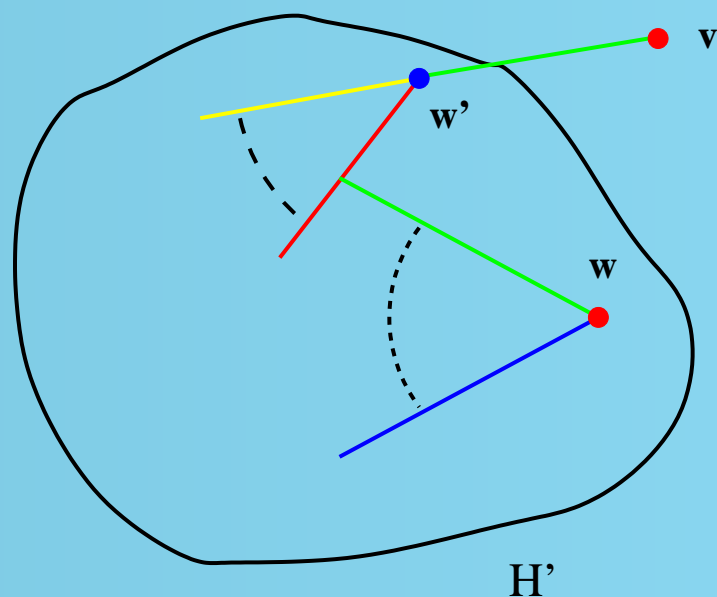
Position des pendants dans H

- Si $\Delta = \alpha$ alors H a au plus un pendent, si $g \geq 4$ ou $\alpha \geq 8$.



Position des pendants dans H

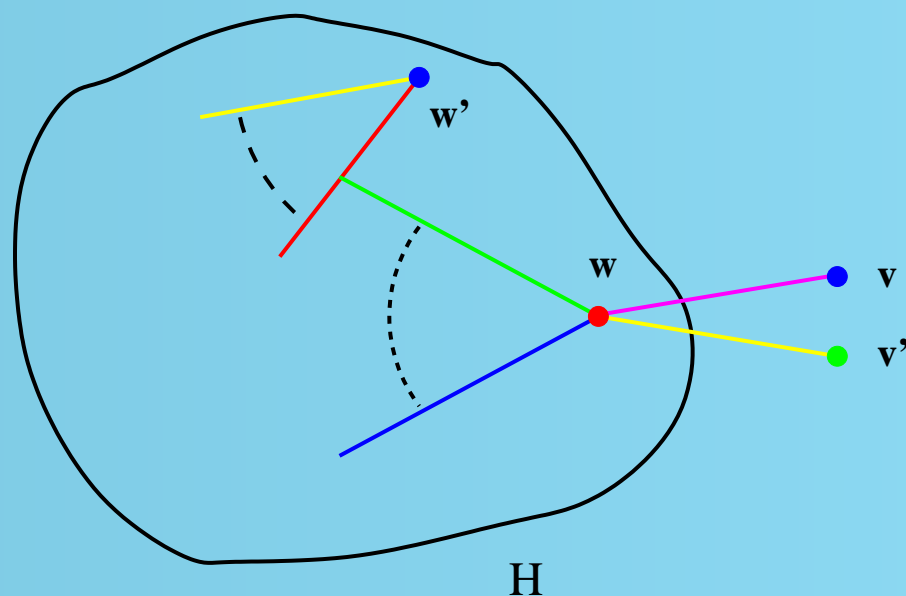
- Si $\Delta = \alpha$ alors H a au plus un pendent, si $g \geq 4$ ou $\alpha \geq 8$.



1er cas :
Il existe w' tel que
 $d(w') = \alpha - 1$.

Position des pendants dans H

- Si $\Delta = \alpha$ alors H a au plus un pendent, si $g \geq 4$ ou $\alpha \geq 8$.

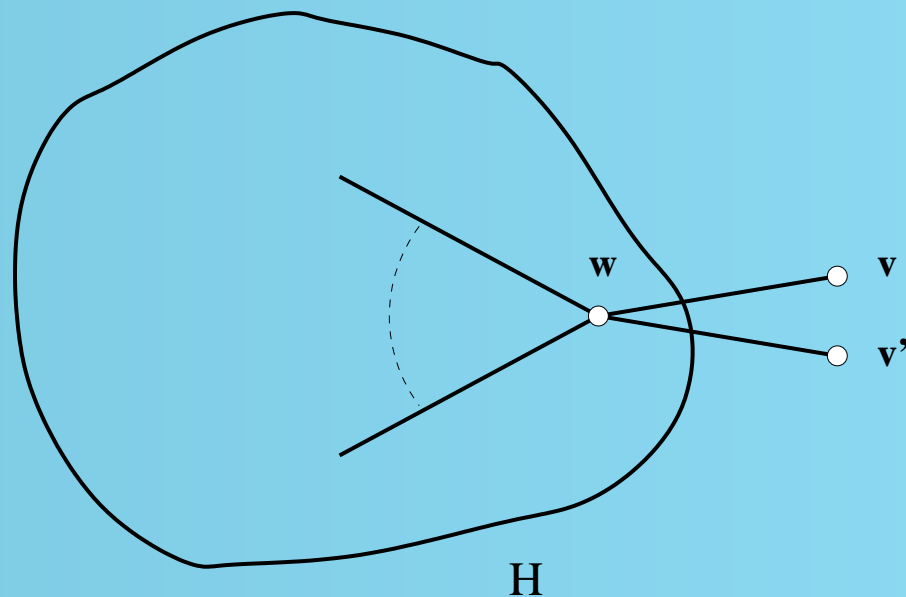


1er cas :

Il existe w' tel que
 $d(w') = \alpha - 1$.

Position des pendants dans H

- Si $\Delta = \alpha$ alors H a au plus un pendent, si $g \geq 4$ ou $\alpha \geq 8$.



2ème cas :

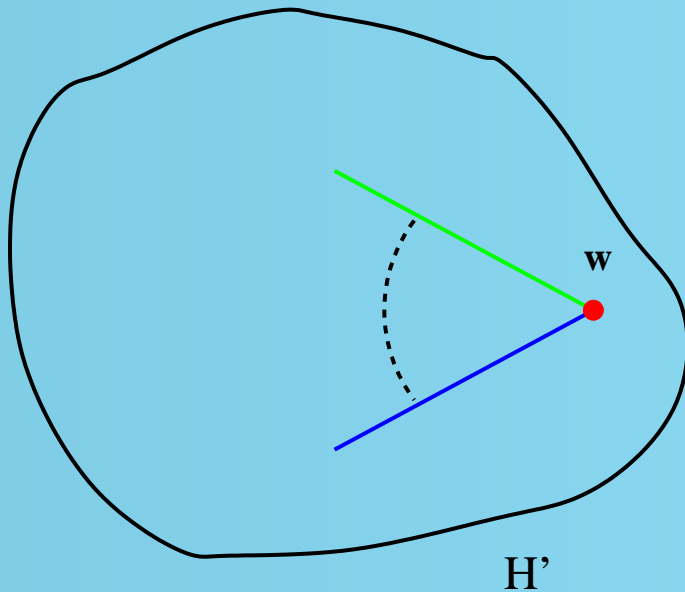
Il n'existe pas de

w' tel que

$$d(w') = \alpha - 1.$$

Position des pendants dans H

- Si $\Delta = \alpha$ alors H a au plus un pendant, si $g \geq 4$ ou $\alpha \geq 8$.



2ème cas :

Il n'existe pas de

w' tel que

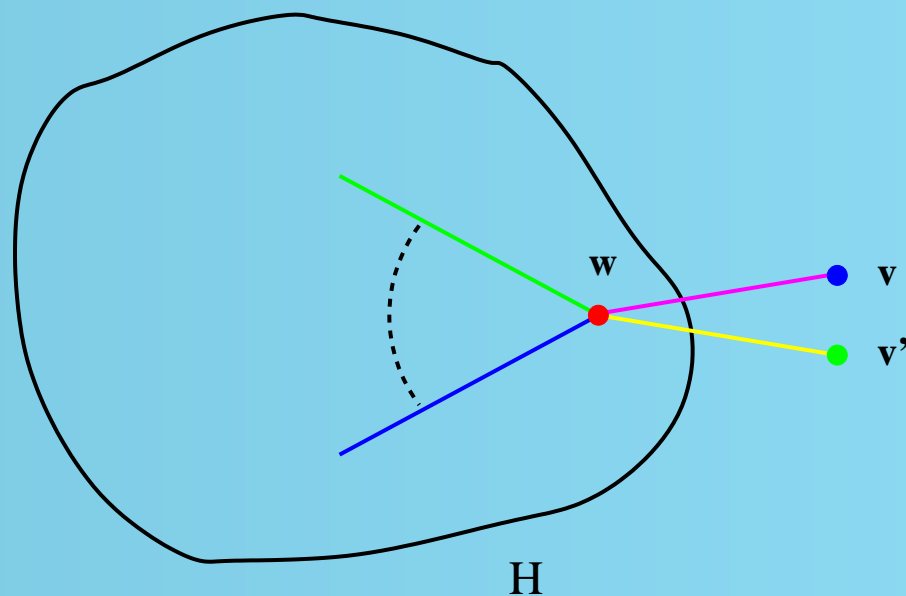
$$d(w') = \alpha - 1.$$

Coloration de H' :

$$\chi(H') + \chi'(H') + d - 1 \text{ couleurs}$$

Position des pendants dans H

- Si $\Delta = \alpha$ alors H a au plus un pendent, si $g \geq 4$ ou $\alpha \geq 8$.



2ème cas :

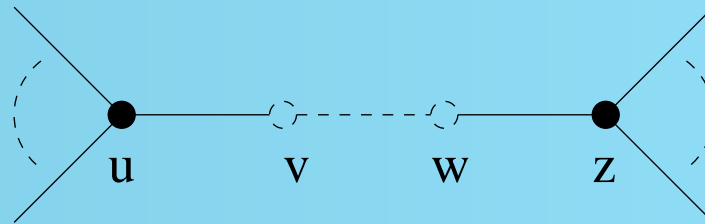
Il n'existe pas de w' tel que $d(w') = \alpha - 1$.

Coloration de H' :

$\chi(H') + \chi'(H') + d - 1$ couleurs

Preuve : $d \geq 2$, $\Delta \geq 2d + 1$ et $g \geq 11$

Lemme. *Supposons $\Delta \geq 2d + 1$ et $d \geq 2$, alors H ne contient pas deux 2-sommets adjacents.*



Formule d'Euler

Lemme.

$$(i) \sum_{v \in V} ((t - 2)d(v) - 2t) < 0 \text{ si } 0 < t \leq g$$

$$(ii) \sum_{v \in V} (d(v) - 4) + \sum_{f \in F} (r(f) - 4) < 0$$

$$(iii) \sum_{v \in V} (d(v) - 6) + \sum_{f \in F} (2r(f) - 6) < 0$$

Preuve du cas : $\Delta \geq 2d + 2$ et $g \geq 6$

Lemme. *Supposons que $\Delta \geq 2d + 2$. Alors*

- (i) Tout 2-sommet est adjacent à deux Δ -sommets.*
- (ii) $n_2 < n_\Delta$.*

Preuve du cas : $\Delta \geq 2d + 2$ et $g \geq 6$

Lemme. *Supposons que $\Delta \geq 2d + 2$. Alors*

- (i) Tout 2-sommet est adjacent à deux Δ -sommets.*
- (ii) $n_2 < n_\Delta$.*

La formule d'Euler (i) implique que $n_2 \geq n_4 + 2n_5 + \dots$, ce qui contredit $n_2 < n_\Delta$ et prouve le Théorème (ii).

Preuve du cas : $\Delta \geq 2d + 3$ et $g \geq 5$

Lemme. *Dans H , si $\Delta \geq 2d + 3$, alors un 3-sommet ne peut pas être voisin de deux 3-sommets.*

A nouveau, on obtient une contradiction avec la formule d'Euler et donc la preuve de ce cas.

Pour un grand degré maximum

Lemme. *Supposons que $\Delta \geq 8d + 2$ et $d \geq 2$. Soit xy une arête de H avec $2 \leq d(x) \leq 5$, alors $d(x) + d(y) \geq \Delta + 2$.*

On obtient une nouvelle fois une contradiction avec la formule d'Euler et par conséquent la preuve du théorème pour les gros degrés maximum.

Conclusion

Théorème. Soit G un graphe planaire de degré maximum Δ et de maille g . Alors $\lambda_d^T(G) \leq \Delta + 2d - 2$ dans les cas suivants :

- (i) $d \geq 2$, $\Delta \geq 2d + 1$ et $g \geq 11$;
- (ii) $\Delta \geq 2d + 2$ et $g \geq 6$;
- (iii) $\Delta \geq 2d + 3$ et $g \geq 5$;
- (iv) $d \geq 2$, $\Delta \geq 8d + 2$.

Conjecture. Pour tout graphe planaire sans triangle G avec $\Delta \geq 3$,

$$\lambda_d^T(G) \leq \Delta + d$$